1、 $q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3$

q 在标准基下矩阵为 $A\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \xrightarrow[\text{左}\cdots]{\text{右}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{左}\cdots]{\text{右}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{左}\cdots]{\text{右}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & -3 \\ & & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ q 的签名为 $(2,1)$.

求签名的方法（计算标准型的办法）

① 行列相伴变换
② 配方法
} 可求出变换矩阵

③ Jacobi公式（需要所有顺序主子式非零，不能算出变换

2. $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad rk(S) = 2$.

(i) 若 $S = P^t \cdot P$, $P \in GL(2,\mathbb{R}) \Rightarrow S$ 半正定 $\xRightarrow{rk(S)=2}$ S 正定.
但 $\det S = -1 < 0 \Rightarrow S$ 不正定. 故而不存在这样 P.

(ii) $\forall A \in SM_n(\mathbb{C})$, $A \sim_c \begin{pmatrix} E_{r(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\Rightarrow S \sim E_2 \Rightarrow P$ 存在.

求 P, 我们先将 S 对角化.

$$S \xrightarrow[\text{左}\cdots]{\text{右}\begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{左}\cdots]{\text{右}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_1^t S P_1 = \begin{pmatrix} 2 & \\ & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & \\ & \sqrt{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad S = \left(\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \\ & \frac{\sqrt{2}}{2}i\end{pmatrix}\cdot P_1^{-1}\right)^t \cdot \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}i\end{pmatrix}\cdot P_1^{-1}$$

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2}i\end{pmatrix}$$

判断二次型(对称矩阵)正定的方法

$q = x^t\cdot Ax$

① 定义：$\forall\, x\in V\setminus\{0\}$ $q(x)>0$ $(x^t Ax>0)$

② 求规范形，其规范形为 $q = x_1^2+\cdots+x_n^2$

③ $\exists\, P\in GL(n,\mathbb{R})$ s.t. $A = P^t\cdot P$

④ A的顺序主子式均 >0.

3. $q = \lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

$A = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}$, A负定 $\Leftrightarrow$ $-A$正定. $M\in M_n(\mathbb{R})$ $\det(-M) = (-1)^n\det M$

应用④ $\Delta_1 = \lambda<0$, $\Delta_2 = -2\lambda-1>0$

$\Delta_3 = 5\lambda+3<0$. $\Rightarrow$ $\lambda<-\frac{3}{5}$.

4. ① $q(-X) = tr(-X^t(-X)) = tr(X^t X) = q(X)$

② $\forall X, Y \in M_n(\mathbb{R})$， $f(X,Y) = \frac{1}{2} tr(q(X+Y) - q(X) - q(Y))$

$$= \frac{1}{2} tr(X^t Y + Y^t X)$$

$$\Rightarrow \quad f(X_1+X_2, Y) = \frac{1}{2} tr((X_1+X_2)^t Y + Y^t(X_1+X_2))$$

$$= \frac{1}{2} tr[(X_1^t Y + Y^t X_1) + (X_2^t Y + Y^t X_2)]$$

$$= f(X_1, Y) + f(X_2, Y)$$

$$f(kX, Y) = \frac{1}{2} tr((kX)^t Y + Y^t(kX))$$

$$= k\frac{1}{2} tr(X^t Y + Y^t X).$$

$$= k f(X, Y)$$

$\Rightarrow f$ 为二次型.

$M_n(\mathbb{R})$ 为 n^2 维 $\mathbb{R}$ 向量空间，取标准基，$X = (x_{ij})$

$tr\, X^t X = \sum_{ij} x_{ij}^2$ ，$\Rightarrow$ $X \neq 0$, $q(X) = \frac{1}{2} tr(X^t X) > 0$.

$\Rightarrow$ q 正定， q 的签名为 $(n^2, 0)$

5. A 正定，求证 A^m 正定.

对 m 归纳. $m=0, 1$ 正定.

$m=2$ 时，$A^2=A\cdot A=A^t\cdot A$，A 可逆 $\Rightarrow A^2$ 正定.

命题对 $0\le m<k$ 成立，$m=k$ 时，
$k>2$

$$A^k=A\cdot A^{k-2}\cdot A=A^t\cdot A^{k-2}\cdot A.$$

$\Rightarrow A^k$ 与 A^{k-2} 合同　由归纳 A^{k-2} 正定 $\Rightarrow A^k$ 正定.

$\Rightarrow m\ge 0$，A^m 正定.　$m<0$ 时，$(A^m)^{-1}$ 正定

$\Rightarrow A^m$ 正定. □

注：$A=P^t\cdot\Lambda P$，$\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，一般情况下，
$A^m\ne P^t\Lambda^m\cdot P$，当 P 为正交矩阵时，$A^m=P^t\cdot\Lambda^m\cdot P$.

6. $q=f_1^2+\cdots+f_s^2-f_{s+1}^2-\cdots-f_{s+t}^2$

同上周习题，q 为二次形. 我们证明：$k\le s$，k 为 q 的正惯性指数.

设 q 在组规范基下矩阵为 $q=y_1^2+\cdots+y_k^2-(y_{k+1}^2+\cdots+y_{k+s}^2)$
$\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$

令 $U=\langle\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k\rangle$，我们考虑齐次方程组：

$$\begin{cases} f_1(x)=0 \\ \vdots \\ f_s(x)=0 \end{cases}$$

其解空间记为 V
$\dim V\ge n-s$.

我们有 $U\cap V=0$，若 $x\in U\cap V$，$x\ne 0$.
$x\in U\Rightarrow q(x)>0$，但 $q(x)=f_1^2+\cdots+f_s^2-f_{s+1}^2-\cdots-f_{s+t}^2\le 0$. 矛盾.

若 $k>s$，则

$$\dim(U\cap V)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U+V)$$
$$=k+\dim(V)-\dim(U+V)\geq k+n-s-n=k-s>0.$$

与 $U\cap V=0$ 矛盾.

一些经典题目：

① 设 $A=(a_{ij})$ $B=(b_{ij})$，$A, B\in M_n(\mathbb{R})$ 定义 $A\odot B=C$　　$c_{ij}=a_{ij}\cdot b_{ij}$.

若 A, B 对称，且正定，则 $A\odot B$ 也为正定矩阵.

Pf：$A\odot B$ 对称，　B 正定，$\Rightarrow \exists\ P=(p_{ij})$ s.t. $B=P^t\cdot P$

$\forall X\in\mathbb{R}^n$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\neq 0$

$$X^t A\odot B X=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\cdot b_{ij})\cdot x_i\cdot x_j$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}p_{ki}\cdot p_{kj}\right)\cdot x_i\cdot x_j$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\ p_{ki}\cdot x_i\cdot p_{kj}\cdot x_j\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}y_k^t A\cdot y_k$$

$$y_k=\begin{pmatrix}p_{k1}\cdot x_1\\ \vdots\\ p_{kn}\cdot x_n\end{pmatrix}\qquad A\text{ 正定}\Rightarrow y_k^t\cdot A\cdot y_k\geq 0$$

$X\neq 0$，不妨设 $x_1\neq 0$，$P\neq 0$，$\Rightarrow$ P 第一列不为 0 $\Rightarrow\exists k_0$ s.t. $p_{k_0}x_1\neq 0$.

$\Rightarrow y_{k_0}\neq 0\Rightarrow y_{k_0}^t\cdot A\cdot y_{k_0}>0$，$\Rightarrow X^t\cdot A\odot B X\geq y_{k_0}^t\cdot A\cdot y_{k_0}>0$. □

② 设 V 为 $\mathbb{R}$上的有限维线性空间，q 为 V 上二次型，若 $\exists\, u, v \in V$ s.t. $q(u) > 0$，$q(v) < 0$，则 $\exists\, w \in V \setminus \{0\}$，$q(w) = 0$，且 q 是满射.

Pf：首先 $u \neq 0$，$v \neq 0$. $q(u) > 0$，$q(v) < 0 \Rightarrow u, v$ 线性无关.

考虑 $\alpha(t) = tu + (1-t)v$，则 $\alpha(0) = v$，$\alpha(1) = u$.

$q(\alpha(t)) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数，$q(0) < 0$，$q(1) > 0$

介值定理 $\Rightarrow \exists\, t_0 \in (0,1)$ s.t. $q(t_0) = 0$.

令 $w = t_0 u + (1-t_0) v$ 则 $w \neq 0$，

因为若 $w = 0$，则 u, v 线性相关.

注意到 $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$，$q(\lambda v) = \lambda^2 q(v) \Rightarrow q$ 为满射.