解：

1. $q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-2x_2x_3$.

对应矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&\frac12&\frac12\\\frac12&0&-1\\\frac12&-1&0\end{pmatrix}$.

$$A\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&-\frac12\\\frac12&0&-1\\\frac12&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1+c_2}\begin{pmatrix}1&\frac12&-\frac12\\\frac12&0&-1\\-\frac12&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-\frac12 r_1}\begin{pmatrix}1&\frac12&-\frac12\\0&-\frac14&-\frac34\\-\frac12&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2-\frac12 c_1}\begin{pmatrix}1&0&-\frac12\\0&-\frac14&-\frac34\\-\frac12&-\frac34&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+\frac12 r_1}\begin{pmatrix}1&0&-\frac12\\0&-\frac14&-\frac34\\0&-\frac34&-\frac14\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3+\frac12 c_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac14&-\frac34\\0&-\frac34&-\frac14\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac14&-\frac34\\0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3-3c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac14&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 签名为 $(2,1)$.

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&-\frac14&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3\leftrightarrow c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-\frac14\end{pmatrix}$$

2.
(i) $$(S|E)=\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{c_1+c_2}\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\1&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-\frac12 r_1}\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\0&-\frac12&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{c_2-\frac12 c_1}\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&1&-\frac12\\0&-\frac12&1&\frac12\end{array}\right)$$

$\Rightarrow S\sim_c\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}$，故 S 不是正定的，即不存在 $P\in GL_2(\mathbb{R})$, s.t. $S=P^tP$

由于 $\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}$ 满秩，故 $\exists Q\in GL_2(\mathbb{C})$, s.t. $Q^tSQ=E$.

(ii) $$\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&1&-\frac12\\0&-\frac12&1&\frac12\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{\sqrt2}{2}r_1}\left(\begin{array}{cc|cc}\sqrt2&0&1&-\frac12\\0&-\frac12&1&\frac12\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{\sqrt2}{2}c_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{\sqrt2}{2}&-\frac12\\0&-\frac12&\frac{\sqrt2}{2}&\frac12\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\sqrt2 i r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{\sqrt2}{2}&-\frac12\\0&-\frac{\sqrt2}{2}i&\frac{\sqrt2}{2}&\frac12\end{array}\right)\xrightarrow{\sqrt2 i c_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}i\\0&1&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}i\end{array}\right)$$

右侧块为 Q：$\underbrace{\begin{matrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}i\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}i\end{matrix}}_{Q}$

$\Rightarrow S\sim_c\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}$，即：$\exists Q\in GL_2(\mathbb{C})$, s.t. $Q^tSQ=E$

$$\Rightarrow S=(Q^t)^{-1}(Q^{-1})=(Q^{-1})^tQ^{-1}$$

令 $P=(Q^{-1})=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}i&-\frac{\sqrt2}{2}i\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{C})$，则 $S=P^tP$.

3. $\lambda x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$. 对应矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

$\Delta_1=\lambda<0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-2\lambda-1>0$, $\Delta_3=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & 1 & -3\end{vmatrix}=5\lambda+3<0$

$\Rightarrow \lambda<0$, $\lambda<-\frac{1}{2}$, $\lambda<-\frac{3}{5}$

$\Rightarrow \lambda<-\frac{3}{5}$

4.证 ① $\forall X\in M_n(R)$. $q(-X)=tr((-X)^t(-X))=tr(X^tX)=q(X)$,

② $\forall X,Y\in M_n(R)$, 令 $f(X,Y)=\frac{1}{2}(q(X+Y)-q(X)-q(Y))$, 则

$f(X,Y)=\frac{1}{2}(tr((X+Y)^t(X+Y))-tr(X^tX)-tr(Y^tY))$

$=\frac{1}{2}(tr((X^t+Y^t)(X+Y))-tr(X^tX)-tr(Y^tY))$

$=\frac{1}{2}(tr(X^tX+X^tY+Y^tX+Y^tY)-tr(X^tX)-tr(Y^tY))$

tr是线性映射 $=\frac{1}{2}(tr(X^tY)+tr(Y^tX))$

~~显然~~ $f(X,Y)=f(Y,X)$, 容易验证. $f(X,Y)$是对称双线性型.

$\Rightarrow q$是$M_n(R)$的二次型.

对 $\forall X=(a_{ij})\in M_n(R)$, $X\neq0$.

$$X^tX=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},$$ ~~$tr(A^t)$~~

$tr(X^tX)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2$, 于是 $\forall X\neq0$, $q(X)>0$. 故 q是正定的.

于是, q的签名为$(n^2,0)$

5. ① $m=0$, E 显然是正定的.

② $m>0$, 由于A是正定的, 故$\exists P\in GL_n(R)$, s.t $A=P^tP$.

下面用数学归纳法证明 A^m正定, $n\in Z^+$

① 当$m=1$时, 显然成立.

② 假设 $m-1$时成立, 下面看m的情况.

$A^m=P^t\underbrace{PP^tPP^t\cdots PP^t}_{m-1}P=P^tB^{m-1}P$, 其中$B=PP^t$,

显然B是正定的, 从而由归纳假设. B^{m-1}是正定的. 由上知 $A^m\simeq_c B^{m-1}$, 故 A^m是正定的.

③ $m<0$，$A^{-1}=(P^tP)^{-1}=P^{-1}(P^{-1})^t=((P^{-1})^t)^t(P^{-1})^t$

$\Rightarrow A^{-1}$ 正定的.

用数学归纳法类似可证 A^m 是正定的，$m\in\mathbb{Z}^-$

6. Pf：设 q 在 ~~规范基~~ $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,\cdots,\varepsilon_n\}$ 下的 ~~规范型~~ 标准型为

$$q=y_1^2+\cdots+y_k^2-y_{k+1}^2-\cdots-y_{k+l}^2$$

假设 $s<k$.

令 $U=\langle\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k\rangle$，$\dim U=k$.

设齐次线性方程组
$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_s(x_1,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$$
的解空间为 V，

$\dim(V)\geq n-s$.

证 q 是二次型，$\forall x,y\in V$

令 $f(\vec{x},\vec{y})=f_1(\vec{x})f_1(\vec{y})+\cdots+f_s(\vec{x})f_s(\vec{y})$

$-f_{s+1}(\vec{x})f_{s+1}(\vec{y})-\cdots-$

$f_{s+t}(\vec{x})f_{s+t}(\vec{y})$.

容易验证 $f(\vec{x},\vec{y})\in\mathcal{L}_2^+(V)$

（$\because f_i(\vec{x}),f_i(\vec{y})$ 是线性映射）

由于 $q(\vec{x})=f(\vec{x},\vec{x})$

故 $q(\vec{x})$ 是二次型.

$\dim(V\cap U)=\dim(V)+\dim(U)-\dim(V+U)\geq n-s+k-n=k-s>0$

故 $\exists\vec{x}\in V\cap U$，$\vec{x}\neq\vec{0}$，

由 $\vec{x}\in U$，则 $q(\vec{x})>0$.

由 $\vec{x}\in V$，则 $q(\vec{x})\leq 0$.

从而推出矛盾，故 $s\geq k$.

Hadamard 乘积 (Children product)

$A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ $B=(b_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$.

定义: $A\odot B=(a_{ij}\cdot b_{ij})_{m\times n}$ 　　例 $\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$

性质 (i) $A\odot(B+C)=A\odot B+A\odot C$.

(ii) $A\odot B=B\odot A$

(iii) $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\odot A=A\odot\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}=A$

$\Rightarrow$ $(M_n(\mathbb{R}),+,\odot,O_{n\times n},\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix})$ 为交换环.

(iv) A 关于 $\odot$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\forall\, 1\le i,j\le n$, $a_{ij}\ne 0$.

(Schur 定理). 设 A,B 是 n 阶(半)正定矩阵, 则 $A\odot B$ 也是(半)正定的.

pf: $\because A,B$ 对称, $\therefore$ $a_{ij}=a_{ji}$, $b_{ij}=b_{ji}$ $(\forall\, 1\le i,j\le n)$.

$A\odot B$ 第 i 行第 j 列元素为 $a_{ij}b_{ij}$, 第 j 行第 i 列元素 $a_{ji}b_{ji}$

$\Rightarrow a_{ij}b_{ij}=a_{ji}b_{ji}$

$\Rightarrow A\odot B$ 是对称矩阵.

$\because B$ 是(半正定)的 $\therefore$ 存在矩阵 $M=(m_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$, 使得

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^n m_{k,i}m_{k,j}$$

设 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)^t\in\mathbb{R}^n$, 则

$$\vec{x}^t(A\odot B)\vec{x}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\Big(\sum_{k=1}^n m_{k,i}m_{k,j}\Big)x_ix_j$$

$$=\sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\underbrace{(m_{k,i}x_i)}_{y_{k,i}}\underbrace{(m_{k,j}x_j)}_{y_{k,j}}=\sum_{k=1}^n(y_{k,1},\cdots,y_{k,n})A\underbrace{\begin{pmatrix}y_{k,1}\\\vdots\\y_{k,n}\end{pmatrix}}_{\vec{y}_k}$$

① A,B 半正定, 则 $\vec{y}_k^{\,t}A\vec{y}_k\ge 0$, $k=1,2,\cdots,n$. 于是 $\vec{x}^t(A\odot B)\vec{x}\ge 0$.

即 $A\odot B$ 半正定.

② A,B 正定, 则 M 可逆, 设 $\vec{x}\ne\vec{0}$, 不妨设 $x_1\ne 0$.

假设 $\vec{y}_k=0$, $k=1,\cdots,n$, 则 $y_{k,1}=0$, 即 $m_{k,1}x_1=0$. $\forall\, k=1,\cdots,n$

$\Rightarrow m_{k,1}=0$, $\forall\, k=1,2,\cdots,n$.

$\Rightarrow M$ 不可逆. $\rightarrow\leftarrow$

$\Rightarrow \exists i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, s.t $\vec{y_i} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{y_i}^t A \vec{y_i} > 0$

$\Rightarrow \vec{x}^t (A \odot B) \vec{x} > 0$

$\Rightarrow$ $A \odot B$ 正定.

(Schur不等式). 设A, B为半正定矩阵, 则有 $|A \odot B| \geq |A| \cdot |B|$.

回顾 $A = (a_{ij})$ 正定, 则 $|A| \leq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$, "=" 成立 $\Leftrightarrow$ A为对角矩阵.

Pf: claim1:

$$f(y_1, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$ 是负定的.

Pf: 作变换 $\vec{y} = A\vec{z}$, 即 由 $\det(A) \neq 0$, 则 $\vec{y} = 0 \Leftrightarrow \vec{z} = 0$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

则

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{11}z_1 + \cdots + a_{1n}z_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n1}z_1 + \cdots + a_{nn}z_n \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[(i=1,2,\cdots,n-1)]{C_n - z_i C_i}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ y_1 & \cdots & y_n & -(y_1z_1 + \cdots + y_nz_n) \end{vmatrix} = -|A| (y_1 z_1 + \cdots + y_n z_n)$$

$$= -|A| \vec{y}^t \vec{z} = -|A| \vec{z}^t A \vec{z}$$

A正定, 从而 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为负定二次型

claim2: $|A| \leq a_{nn} |A_{n-1}|$, 等式成立 $\Leftrightarrow$ $a_{1n} = a_{2n} = \cdots = a_{n-1,n} = 0$.

A_{n-1}: A的前n-1行前n-1列矩阵.

Pf:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} + 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} + 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 + a_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix}}_{f(a_{1n}, \cdots, a_{n-1,n})} + a_{nn}|A_{n-1}| \leq a_{nn}|A_{n-1}|$$

且

$f(a_{1,n}, \cdots, a_{n-1,n}) = 0 \Leftrightarrow a_{1,n} = a_{2,n} = \cdots = a_{n-1,n} = 0$

定理.(对n归纳)

$n=1$ ✓.

(A_{n-1} 正定)

假设 $n-1$ 成立，即 $|A_{n-1}| \le a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}$.

则 $|A| \le a_{nn}|A_{n-1}| \le a_{nn}a_{11}\cdots a_{n-1} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

"=" 成立 $\Leftrightarrow$ A为对角阵.

下证 schur 不等式,

$n=1$ 时，显然成立.

假设结论对 $n-1$ 成立，考虑 n 的情形.

$|A|=0$ 时，由于 $A\odot B$ 半正定，$|A\odot B| \ge 0 = |A||B|$.（或 $|B|=0$）

$|A|\ne 0$，A正定，令

$|B|\ne 0$，B正定.

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}-\frac{|A|}{|A_{n-1}|} \end{pmatrix}$$

(A 正定 $\Rightarrow \underline{|A_{n-1}|>0}$)

则 $$|C|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & -\frac{|A|}{|A_{n-1}|} \end{vmatrix} = |A| - \frac{|A|}{|A_{n-1}|}|A_{n-1}| = 0$$

C是半正定的;

A_{n-1} 正定 $\Rightarrow \exists\ P\in GL_n(\mathbb{R})$, s.t $P^tA_{n-1}P=E_{n-1}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} P^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \vec{x} \\ \vec{x}^t & a_{nn}-\frac{|A|}{|A_{n-1}|} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-1} & P^t\vec{x} \\ \vec{x}^tP & a_{nn}-\frac{|A|}{|A_{n-1}|} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{换}]{\text{合同变}} \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由 schur 乘积定理知

$C\odot B$ 半正定 $\Rightarrow |C\odot B| \ge 0$

故 $$|C\odot B| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1,n-1}b_{1,n-1} & a_{1,n}b_{1,n}+0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1}b_{n-1,1} & \cdots & & a_{n-1,n-1}b_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}b_{n-1,n}+0 \\ a_{n,1}b_{n,1} & \cdots & & a_{n,n-1}b_{n,n-1} & \left(a_{nn}-\frac{|A|}{|A_{n-1}|}\right)b_{n,n} \end{vmatrix}$$

Zn 3

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} & a_{1,n}b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1,1}b_{n-1,1} & \cdots & & a_{n-1,n-1}b_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}b_{n-1,n} \\ a_{n,1}b_{n,1} & \cdots & & a_{n,n-1}b_{n,n-1} & a_{nn}b_{nn} \end{vmatrix} - \frac{|A|b_{nn}}{|A_{n-1}|}|A_{n-1}\odot B_{n-1}|$$

$$= |A\odot B| - \frac{|A|}{|A_{n-1}|}a_{nn}|A_{n-1}\odot B_{n-1}| \geq 0$$

$$\Rightarrow |A\odot B| \geq b_{nn}\frac{|A|}{|A_{n-1}|}\cdot|A_{n-1}\odot B_{n-1}|$$

（归纳假设）

$$\geq b_{nn}\frac{|A|}{|A_{n-1}|}|A_{n-1}||B_{n-1}|$$

$$= b_{nn}|A||B_{n-1}| \overset{\text{claim 2}}{\geq} |A|\cdot|B|$$

A_{n-1}, B_{n-1} 半正定，（使用定理 9.18 (i)⇔(ii) 也成）

$y^t A_{n-1} y$　$y=(x_1,\cdots,x_{n-1})^t$

$\shortparallel$

$x^t A x \geq 0$　$x=(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)^t$

其中 $x_n=0$.

$$\Rightarrow |A\odot B| \geq |A|\cdot|B| \text{ 得证.}$$

设 R^3 上的实二次型是

$$q = 2(x_1-x_2)^2+3(x_1+x_2+x_3)^2+7(x_1-x_2+x_3)^2-(3x_2-x_1)^2$$

确定 q 的类型.

解：令 $\begin{cases} y_1 = x_1-x_2 \\ y_2 = x_1+x_2+x_3 \\ y_3 = x_1-x_2+x_3 \\ y_4 = 3x_2-x_1 \end{cases}$　$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$　行向量 $\vec{A_1},\vec{A_2},\vec{A_3},\vec{A_4}$.

则 $\vec{A_1},\vec{A_2},\vec{A_3}$ 线性无关，而 $\vec{A_4}$ 是 $\vec{A_1},\vec{A_2},\vec{A_3}$ 的线性组合，事实上，

$$\vec{A_4} = -\vec{A_1}+\vec{A_2}-\vec{A_3}$$

考虑坐标变换，

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{A_1} \\ \vec{A_2} \\ \vec{A_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

则 $y_4 = -y_1+y_2-y_3$. 在新的坐标下，

$$q = 2y_1^2+3y_2^2+7y_3^2-(-y_1+y_2-y_3)^2$$

$$= 2y_1^2+3y_2^2+7y_3^2-(y_1^2+y_2^2+y_3^2-2y_1y_2+2y_1y_3-2y_2y_3)$$

$$= y_1^2+2y_2^2+6y_3^2+2y_1y_2-2y_1y_3+2y_2y_3$$

q 在新的坐标下的矩阵是

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

，B 的三个顺序主子式分别是 $\Delta_1=1$，$\Delta_2=2-1=1>0$

$\Delta_3=1$，故 B 是正定的

4