1.(i) $\forall \alpha,\beta\in F,\ \vec{z}\in V$

$f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{z},\vec{y})=g(\alpha\vec{x}+\beta\vec{z})h(\vec{y})=(\alpha g(\vec{x})+\beta g(\vec{z}))h(\vec{y})=\alpha g(\vec{x})h(\vec{y})+\beta g(\vec{z})h(\vec{y})$

$=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{z},\vec{y})$

$f(\vec{x},\alpha\vec{y}+\beta\vec{z})=g(\vec{x})h(\alpha\vec{y}+\beta\vec{z})=g(\vec{x})(\alpha h(\vec{y})+\beta h(\vec{z}))=\alpha g(\vec{x})h(\vec{y})+\beta g(\vec{x})h(\vec{z})$

$=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{x},\vec{z})$.

$\Rightarrow f(\vec{x},\vec{y})$是双线性型

(ii) ①若 $g=0$ 或 $h=0$，则 $f(\vec{x},\vec{y})=0$，从而 $\mathrm{rank}(f)=0$.

② 若 $g\neq0$ 且 $h\neq0$，故 $\exists\ \vec{u},\vec{v}\in V$，使得 $g(\vec{u})\neq0$，$h(\vec{v})\neq0$，于是 $f(\vec{u},\vec{v})\neq0$.

设V的一组基为 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$，从而

$\vec{x}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}$，$\vec{y}=y_1\vec{e_1}+\cdots+y_n\vec{e_n}$

$f(\vec{x},\vec{y})=g(\vec{x})h(\vec{y})=(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\cdot(\beta_1y_1+\cdots+\beta_ny_n)$

这里 $\alpha_i,\beta_i\in F$
这里 α_i 不全为0且 β_i 不全0

$$=(x_1,\cdots,x_n)\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}(\beta_1,\cdots,\beta_n)}_{A}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

$\mathrm{rank}(f)=\mathrm{rank}(A)$，

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1 & \cdots & \alpha_1\beta_n\\ \vdots & & \\ \alpha_n\beta_1 & \cdots & \alpha_n\beta_n\end{pmatrix}$$

A的第2行到第n行与第一行成比例.
且 $A\neq0$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(f)=\mathrm{rank}(A)=1$

(iii) ① $\forall\ \vec{x}\in V$，$q(\vec{x})=g^2(\vec{x})=g^2(-\vec{x})=q(-\vec{x})$

② $\forall\ \vec{x},\vec{y}\in V$，$\frac{1}{2}(q(\vec{x}+\vec{y})-q(\vec{x})-q(\vec{y}))=\frac{1}{2}(g^2(\vec{x}+\vec{y})-g^2(\vec{x})-g^2(\vec{y}))$

$=\frac{1}{2}((g(\vec{x})+g(\vec{y}))^2-g^2(\vec{x})-g^2(\vec{y}))$

$=\frac{1}{2}(g^2(\vec{x})+2g(\vec{x})g(\vec{y})+g^2(\vec{y})-g^2(\vec{x})-g^2(\vec{y}))$

$=g(\vec{x})g(\vec{y})$.

容易验证，$g(\vec{x})g(\vec{y})$ 是 V上的对称双线性型，

故 $q(\vec{x})$是V上的二次型.

2. $q(\vec{x}) = x_1^2 - x_1x_2 + 3x_3x_2 + 10x_4x_3 - 2x_4^2$

解：设 $q(\vec{x}) = x^tAx$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A \xrightarrow{r_2-\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-6r_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4+\frac{5}{9}r_3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

从而 $\mathrm{rank}(q) = \mathrm{rank}(A) = 4$.

3. $q(\vec{x}) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

(行列操作)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{c_2+c_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{c_3-c_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{c_3+2c_2} \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{B} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{P} \end{array}\right)$$

所求典范基为P的三个列向量，在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

3.(配方法) $q(\vec{x})=x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

$$=(x_1-x_2+x_3)^2-x_2^2-4x_3^2+4x_2x_3.$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1-x_2+x_3 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1+y_2-y_3 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$

$\Rightarrow q(\vec{x})=y_1^2-y_2^2-4y_3^2+4y_2y_3.$

$$=y_1^2-(y_2-2y_3)^2$$

令 $\begin{cases} z_1=y_1 \\ z_2=y_2-2y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=z_1 \\ y_2=z_2+2z_3 \\ y_3=z_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_2}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$

注意到 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}=P_1P_2\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$

$$q(\vec{x})=z_1^2-z_2^2.$$

所求典范基为P的三个列向量，在这组基下矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

"⇒" 设 $A\sim_c B$，则 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$，从而 $\mathrm{rank}(p)=\mathrm{rank}(q)$.

"⇐" 若 $\mathrm{rank}(p)=\mathrm{rank}(q)$，则 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$. 设 $r=\mathrm{rank}(A)$，则 $r=\mathrm{rank}(B)$.

由于 $A,B\in SM_n(\mathbb{C})$，所以

$$A\sim_c\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 和 } B\sim_c\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是 $A\sim_c B$.

Pf: $\forall \alpha,\beta\in F$, $v_1,v_2\in V$，则

$$\phi(\alpha v_1+\beta v_2)=f(x,\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha f(x,v_1)+\beta f(x,v_2)$$
$$=\alpha\phi(v_1)+\beta\phi(v_2)$$

于是ϕ是线性映射. 下证ϕ是单射.

设 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是V的一组基，A是f在该基下的矩阵.

设 $v=\lambda_1\vec{e}_1+\cdots+\lambda_n\vec{e}_n$，则对任意的 $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\cdots\lambda_n\vec{e}_i\in V$，我们有

$$f(\vec{x},\vec{v})=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}.$$

设 $\phi(\vec{v})=0^*$，则由上式可得，对 $\forall x_1,\cdots,x_n\in F$，

$$(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow A\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

否则：$A\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}\neq 0$，则 $A\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vdots\\a\\\vdots\end{pmatrix}$—$i$，$a\neq 0$).

取 $x_i=1$，$x_1=\cdots=x_{i-1}=0$，$x_{i+1}=\cdots=x_n=0$

则 $(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}\neq 0$

由于 $rank(A)=n$，于是 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$，于是 $\vec{v}=\vec{0}$. 故证 ϕ 是单射，

又由于 $\dim(V)=\dim(V^*)$，故可知 ϕ 是满射，

从而 ϕ 是线性同构

6. Pf：引理：设 $f_1,\cdots,f_d\in V^*$ 线性无关，设 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 是 V 的一组基，f_i 在该基下的矩阵是 $\vec{a_i}\in F^{1\times n}$，$i=1,2,\cdots,d$. 则 $\vec{a_1},\cdots,\vec{a_d}$ 线性无关.

Pf：设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_d\in F$，使得

$$\alpha_1\vec{a_1}+\cdots+\alpha_d\vec{a_d}=O_{1\times n}.$$

则对 $\forall\vec{x}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}\in V$.

$$(\alpha_1f_1+\cdots+\alpha_df_d)(\vec{x})=(\alpha_1f_1+\cdots+\alpha_df_d)(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1\vec{a_1}+\cdots+\alpha_d\vec{a_d})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=0$$

$\cancel{\Rightarrow\alpha_1\vec{a_1}+\cdots+\alpha_d\vec{a_d}=\vec{0}_{1\times n}}$

$\Rightarrow\alpha_1f_1+\cdots+\alpha_df_d=0^*$，由此可得出 $\alpha_1=\cdots=\alpha_d=0$. 即 $\vec{a_1},\cdots,\vec{a_d}$ 线性无关

设 $h(\vec{x},\vec{y})=f_1(\vec{x})f_1(\vec{y})+\cdots+f_k(\vec{x})f_k(\vec{y})$. 于是 $h\in\mathcal{L}_2^+(V)$ 且 $q(\vec{x})=h(\vec{x},\vec{x})$. 故 q 是二次型.

不妨设 $f_1,\cdots,f_d$ 是 $\langle f_1,\cdots,f_k\rangle$ 的一组基，则

$$q(\vec{x})=\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\alpha_{ij}f_i^{(\vec{x})}f_j^{(\vec{x})}\underset{=(x_1,\cdots,x_n)(\ )_{n\times n}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}}{}，\text{其中}\ \alpha_{ij}\in F.\qquad(1)$$

设 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 是 V 的一组基，f_i 在该基下的矩阵是 $a_i\in F^{1\times n}$，$i=1,2,\cdots,d$

由上述引理可知，$\vec{a_1},\cdots,\vec{a_d}$ 是线性无关的.

设 $P \in GL_n(F)$ 使得 P 的前 d 行是 $\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_d}$. 考虑坐标变换

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_d} \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \\ \vdots \end{pmatrix}$$

这 $f_i(\vec{x}) = f_i(x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n}) = \sum_i x_i f_i(\vec{e_i})$ ~~$= \sum \vec{a_i}$~~ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e}$

在此坐标变换下，(1) 变为 $\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{ij} y_i y_j$. 于是，在基底

$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = (e_1, \cdots, e_n)P^{-1}$ 下，

对 $\forall \vec{y} = y_1\vec{\varepsilon_1} + \cdots + y_n\vec{\varepsilon_n}$,

$$q(\vec{y}) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{ij} y_i y_j,$$

进而 q 在新基底下的矩阵具有如下形式

$$\begin{pmatrix} B_{d\times d} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是 $\mathrm{rank}(q) = \mathrm{rank}(B) \le d$

计算 $\mathbb{R}^n$ 上二次型 $P_n=\sum_{1\le i<j\le n}2x_ix_j$ 的签名.

解: P_n在标准基下的矩阵

$$A_n=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\ \vdots&&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{pmatrix}$$

> Jacobi公式 $A\in SM_n(F)$, 设 $\Delta_0=1$, Δ_i 是A的i阶顺序主子式, 如果 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$都非零, 则
> $$A\sim_c \mathrm{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0},\frac{\Delta_2}{\Delta_1},\cdots,\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right).$$

n=2时, $A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$$(A_2|E)=\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{C_1+C_2}\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\1&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-\frac12 r_1}\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\0&-\frac12&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_2-\frac12 C_1}\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&1&0\\0&-\frac12&1&\frac12\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ 签名是 $(1,1)$

一般情况.

$$A_n\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&1&2&\cdots&2&2\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&1\cdots&1&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1+C_2}\begin{pmatrix}2&1&2&\cdots&2&2\\1&0&1&\cdots&1&1\\2&1&0&1\cdots&1&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&&\vdots\\2&1&1&\cdots&0&1\\2&1&1&\cdots&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-\frac12 r_1}\begin{pmatrix}2&1&2&\cdots&2&2\\0&-\frac12&0&\cdots&&0\\2&1&0&1&\cdots&1\\2&1&1&0&\cdots&1\\ \vdots&&&&\ddots&\\2&\cdots&&&1&0\end{pmatrix}\text{即}$$

$$\xrightarrow{C_2-\frac12 C_1}\begin{pmatrix}2&0&2&\cdots&\cdots&2\\0&-\frac12&0&\cdots&\cdots&0\\2&0&0&1&\cdots&1\\2&0&1&0&\cdots&1\\ \vdots&\vdots&&&\ddots&\vdots\\2&0&1&1&\cdots&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}2&0&2&\cdots&\cdots&2\\0&-\frac12&0&\cdots&\cdots&0\\0&0&-2&-1&\cdots&-1\\2&0&1&0&\cdots&1\\ \vdots&\vdots&&&\ddots&\vdots\\2&0&1&1&\cdots&0\end{pmatrix}\xrightarrow{C_3-C_1}\begin{pmatrix}2&0&0&2&\cdots&2\\0&-\frac12&0&0&\cdots&0\\0&0&-2&-1&\cdots&-1\\2&0&-1&0&\cdots&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\ddots&\\2&0&-1&&&\end{pmatrix}$$

$\cdots\cdots$

$A_n\sim_c\begin{pmatrix}M&0\\0&N\end{pmatrix}$, 其中 $M=\begin{pmatrix}2&0\\0&-\frac12\end{pmatrix}$, $N=-\begin{pmatrix}2&1&1&\cdots&1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&2&\cdots&1\\ \vdots&&&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&2\end{pmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$

$P^tA_nP=\begin{pmatrix}M&0\\0&N\end{pmatrix}$.

$$\det\begin{pmatrix}2&1&1&\cdots&1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&2&\cdots&1\\ \vdots&&&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}2+n-3&1&\cdots&1\\2+n-3&2&\cdots&1\\ \vdots&&\ddots&\vdots\\2+n-3&1&\cdots&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n-1&1&1&\cdots&1\\0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&&\ddots&&\vdots\\0&0&\cdots&&1\end{vmatrix}$$

$=n-1.$

$\Rightarrow \det(N)=(-1)^{n-2}(n-1)$

设 Δ_i 是 N 的 i 阶顺序主子式，$i=1,2,\cdots,n-2$，且 $\Delta_0=1$，则 $\Delta_{i+1}/\Delta_i<0$，$i=1,2,\cdots,n-2$. 由 Jacobi 公式，

$$N\sim_c \mathrm{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0},\frac{\Delta_2}{\Delta_1},\cdots,\frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-3}}\right)\sim_c -E_{n-2}.$$

于是存在 $P\in GL_n(F)$ 和 $Q\in GL_{n-2}(F)$，使得

$$\begin{pmatrix}E_2&0\\0&Q\end{pmatrix}^t P^tA_nP\begin{pmatrix}E_2&0\\0&Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_2&0\\0&Q\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}M&0\\0&N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_2&0\\0&Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}&0\\0&-E_{n-2}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ P的签名是 $(1,n-1)$.

习题1. 的补充.

设F是域，V是域F的n维线性空间，$h\in\mathcal{L}_2(V)$ 且 $\mathrm{rank}(h)=1$. 证明：存在 $f,g\in V^*$，使得对任意 $(\vec{x},\vec{y})\in V\times V$，$h(\vec{x},\vec{y})=f(\vec{x})g(\vec{y})$

解：设 h 在 V 的某组基 $e_1,\cdots,e_n$ 下的矩阵是 A，由于 $\mathrm{rank}(A)=1$，所以存在非零向量 $\vec{v}\in F^n$，使得 $A=(\beta_1\vec{v},\cdots,\beta_n\vec{v})$，其中 $\beta_1,\cdots,\beta_n\in F$. 设 $\vec{v}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^t$，则

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}(\beta_1\cdots\beta_n)$$

对任意的 $\vec{x}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}$，$\vec{y}=y_1\vec{e_1}+\cdots+y_n\vec{e_n}\in V$，我们有

$$h(\vec{x},\vec{y})=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)}_{f}\underbrace{(\beta_1y_1+\cdots+\beta_ny_n)}_{g}.$$

正定性等价刻画：

$A\in SM_n(\mathbb{R})$. A正定 $\Leftrightarrow$ $\exists B\in GL_n(\mathbb{R})$, s.t. $A=B^tB$.

签名 (k,l)

$\Leftrightarrow$ A的任何k阶(顺序)主子式都大于0

$\Leftrightarrow$ [illegible]，则 $k=n$.

$\Leftrightarrow$ $A\sim_c E_n$

$\Leftrightarrow$ $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x}^tA\vec{x}>0$

A半正定 $\Leftrightarrow$ $l=0$

$\Leftrightarrow$ $\exists B\in M_n(\mathbb{R})$, s.t. $A=B^tB$

$\Leftrightarrow$ $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x}^tA\vec{x}\geq0$

$\Leftrightarrow$ $A\sim_c\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$, $r=\mathrm{rank}(A)$

$\Leftrightarrow$ A的任何k阶(顺序)主子式都大于0