1. Pf: (i). 显然 $0 \in V_1, V_2$ 故 V_1, V_2 是 $Map(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 的非空子集，

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f(x), g(x) \in V_2$

$\alpha f(-x) + \beta g(-x) = -\alpha f(x) - \beta g(x) = -(\alpha f(x) + \beta g(x))$.

$\Rightarrow \alpha f(x) + \beta g(x) \in V_2$

故 V_2 是 $Map(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 的子空间

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f(x), g(x) \in V_1$

$\alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$

$\Rightarrow \alpha f(x) + \beta g(x) \in V_1$

故 V_1 是 $Map(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 的子空间

(ii)

$\forall f(x) \in Map(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

令 $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

$g(-x) = g(x) \Rightarrow g(x) \in V_1$

$h(x) = -h(-x) \Rightarrow h(x) \in V_2$.

$\Rightarrow Map(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq V_1 + V_2$

又 $\because V_1, V_2 \subseteq Map(\mathbb{R}, \mathbb{R})$，故 $Map(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = V_1 + V_2$

$\forall f(x) \in V_1 \cap V_2$，则有 $f(x) \in V_1$，从而 $f(-x) = f(x)$，

$f(x) \in V_2$，从而 $f(-x) = -f(x)$.

$\Rightarrow f(x) = -f(x) \xRightarrow{\text{注：} 1+1 \neq 0 \text{（}\mathbb{R}\text{的特征为0）}} f(x) = 0$.

$\Rightarrow Map(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2$

2. (i). 设 $\exists a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, s.t

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_n f_n(x) = 0, \quad \forall x \in R$$

$$\Rightarrow a_1 f_1'(x) + a_2 f_2'(x) + \cdots + a_n f_n'(x) = 0, \quad \forall x \in R$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow a_1 f_1^{(n-1)}(x) + a_2 f_2^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n f_n^{(n-1)}(x) = 0, \quad \forall x \in R.$$

从而 $(a_1, \cdots, a_n)^t$ 满足

$$\begin{pmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \cdots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$W(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ 该方程只有零解

$\Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$

①

(ii)

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{ax}\sin bx & e^{ax}\cos bx \\ ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx & ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx \end{vmatrix}$$

$$W(0)=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{vmatrix}=-b.$$

① $b\neq 0$，由(i)知 $e^{ax}\sin bx$，$e^{ax}\cos bx$ 线性无关

$b=0$，$e^{ax}\sin bx=0$，$e^{ax}\cos bx=e^{ax}$，0与 e^{ax} 线性相关

3.(i). 证明：$\forall \vec{x}\in V$，由直和的唯一性可知，∃！$\vec{x_i}\in V_i$，$i=1,2,\cdots,k$，使得

$\vec{x}=\vec{x_1}+\vec{x_2}+\cdots+\vec{x_k}$

故 π_i 是良定义的.

$\forall \alpha,\beta\in F$，$\vec{x},\vec{y}\in V$，则∃！$\vec{x_i},\vec{y_i}\in V_i$，使得.

$\vec{x}=\vec{x_1}+\cdots+\vec{x_k}$，从而 $\pi_i(\vec{x})=\vec{x_i}$

和

$\vec{y}=\vec{y_1}+\cdots+\vec{y_k}$，从而 $\pi_i(\vec{y})=\vec{y_i}$

$$\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=\alpha(\vec{x_1}+\cdots+\vec{x_k})+\beta(\vec{y_1}+\cdots+\vec{y_k})$$
$$=\alpha\vec{x_1}+\cdots+\alpha\vec{x_k}+\beta\vec{y_1}+\cdots+\beta\vec{y_k}$$
$$=(\alpha\vec{x_1}+\beta\vec{y_1})+\cdots+(\alpha\vec{x_k}+\beta\vec{y_k}) \quad (1)$$

由于 V_i 为 V 的子空间，故 $\alpha\vec{x_i}+\beta\vec{y_i}\in V_i$，由直和的唯一性可知，(1)为 $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$ 的唯一分解，

从而 $\pi_i(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha\vec{x_i}+\beta\vec{y_i}=\alpha\pi_i(\vec{x})+\beta\pi_i(\vec{y})$.

$\Rightarrow \pi_i$ 均为线性映射 $i=1,2,\cdots,k$.

(ii) $\forall\vec{x}\in V$ $\pi_i(\vec{x})=\vec{x_i}\in V_i$，

$$\vec{x_i}=\underset{V_{i-1}}{0}+\cdots+0+\underset{V_i}{\vec{x_i}}+\cdots\cdots 0$$

$\Rightarrow \pi_i^2(\vec{x})=\pi_i(\vec{x_i})=\vec{x_i}=\pi_i(\vec{x})$.

$\Rightarrow \pi_i^2=\pi_i$，$i=1,2,\cdots k$.

(iii) $\forall\vec{x}\in V$，∃！$\vec{x_i}\in V_i$ 使得 $\vec{x}=\vec{x_1}+\cdots+\vec{x_n}$.

$\pi_j(\vec{x})=\vec{x_j}$；$\vec{x_j}=0+\cdots 0+\underset{V_j}{\vec{x_j}}+\cdots 0$

$\Rightarrow \pi_i(\vec{x_j})=\vec{0}$

$\Rightarrow \pi_i\pi_j(\vec{x})=\pi_i(\vec{x_j})=\vec{0}$

$\Rightarrow \pi_j\pi_j=0$

④ 证明：$\forall \vec{x} \in V$，$\exists ! \vec{x_i} \in V_i$，s.t $\vec{x} = \vec{x_1} + \cdots + \vec{x_k}$

$\Rightarrow \pi_i(\vec{x}) = \vec{x_i}$

$(\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_k)(\vec{x}) = \pi_1(\vec{x}) + \cdots + \pi_k(\vec{x})$

$= \vec{x_1} + \cdots + \vec{x_k} = \vec{x}$

$\Rightarrow \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_k = \varepsilon$.

4.(i)（不少域的特征为0）

Pf：由于V_1是V的真子空间，则$\exists \vec{v} \in V$，$\vec{v} \notin V_1$.

若$\vec{v} \notin V_2$，则存在性得证

若$\vec{v} \in V_2$，由于V_2是V的真子空间，则$\exists \vec{w} \notin V_2$，$\vec{w} \in V$

若$\vec{w} \notin V_1$，则存在性得证，若$\vec{w} \in V_1$，下证 $\vec{w} + \vec{v} \notin V_1$，$\vec{w} + \vec{v} \notin V_2$.

假设$\vec{w} + \vec{v} \in V_1$；推出$\vec{v} \in V_1$，矛盾.

假设$\vec{w} + \vec{v} \in V_2$，推出$\vec{w} \in V_2$，矛盾.

故$\vec{w} + \vec{v} \notin V_1$且$\vec{w} + \vec{v} \notin V_2$.

综上，命题得证

(ii)（只需域F有无穷多个元素即可）

假设任何一个域F上的线性空间可以表示成有限个真子空间的并，即$\exists$真子空间$V_1, V_2, \cdots, V_k$.

使得

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$$

不妨进一步假设k是使得上式成立的最小的正整数，则$k > 1$且

$$V_i \not\subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_{i-1} \cup V_{i+1} \cup \cdots \cup V_k, \ i = 1, 2, \cdots, k.$$

取$\vec{v_1} \in V_1 \backslash V_2$，$\vec{v_2} \in (V_2 \backslash V_1 \cup V_3 \cup \cdots \cup V_k)$. 由于F中含有无穷多个元素，所以

$$\{\lambda \vec{v_1} + \vec{v_2} \mid \lambda \in F \backslash \{0\}\}$$

是个无穷集. 由鸽巢原理可知存在$\lambda_1, \lambda_2 \in F \backslash \{0\}$，其中$\lambda_1 \neq \lambda_2$，和存在$i \in \{1, 2, \cdots, k\}$

使得$\lambda_1 \vec{v_1} + \vec{v_2}$，$\lambda_2 \vec{v_1} + \vec{v_2} \in V_i$. 如果$i = 1$，则

$$\lambda_1 \vec{v_1} + \vec{v_2} \in V_1 \Rightarrow \vec{v_2} \in V_1.$$

与$\vec{v_2}$的选择矛盾，如果$i = 2$，则

$$\lambda_1 \vec{v_1} + \vec{v_2} \in V_2 \Rightarrow \lambda_1 \vec{v_1} \in V_2 \Rightarrow \vec{v_1} \in V_2.$$

与$\vec{v_1}$的选择矛盾. 如果$i > 2$，则

$$\lambda_2(\lambda_1 \vec{v_1} + \vec{v_2}) - \lambda_1(\lambda_2 \vec{v_1} + \vec{v_2}) = (\lambda_2 - \lambda_1)\vec{v_2} \in V_i \Rightarrow \vec{v_2} \in V_i.$$

与$\vec{v_2}$的选择矛盾.

子空间

若 W_1, W_2 是 V 的子空间，则 W_1+W_2，$W_1\cap W_2$ 均为 V 的子空间，但 $W_1\cup W_2$ 不一定是 V 的子空间.

引理：W_1+W_2 是 V 的子空间

证：$\forall \vec{x},\vec{y}\in W_1+W_2$，$\exists\ \vec{x_1},\vec{y_1}\in W_1$，$\vec{x_2},\vec{y_2}\in W_2$，s.t. $\vec{x}=\vec{x_1}+\vec{x_2}$，$\vec{y}=\vec{y_1}+\vec{y_2}$.

$\forall\ \alpha,\beta\in F$，$\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=\alpha(\vec{x_1}+\vec{x_2})+\beta(\vec{y_1}+\vec{y_2}) \overset{\text{分配律}}{=} \alpha\vec{x_1}+\alpha\vec{x_2}+\beta\vec{y_1}+\beta\vec{y_2}$

$\overset{\text{结合交换律}}{=} \underset{\in W_1}{(\alpha\vec{x_1}+\beta\vec{y_1})}+\underset{\in W_2}{(\alpha\vec{x_2}+\beta\vec{y_2})}$

$\Rightarrow \alpha x+\beta y\in W_1+W_2$.

例：在三维空间 $\mathbb{R}^3$，$F=\mathbb{R}$.

$W_1=\left\{\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} \middle| a\in R\right\}$，$W_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix} \middle| b\in R\right\}$.

$W_1\cup W_2=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix} \middle| a,b\in R \text{ 且 } a,b \text{ 至少有一个为0}\right\}$ 不是 V 的子空间.

$\left(\because \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\in W_1, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\in W_2, \text{但} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\notin W_1\cup W_2\right)$

引理：若 W_1,W_2 互不包含，(即 $W_1\not\subseteq W_2$ 且 $W_2\not\subseteq W_1$)，则 $W_1\cup W_2$ 不是 V 的子空间.

证：只需证若 $W_1\cup W_2$ 是 V 的子空间，则 $W_1\subseteq W_2$ 或者 $W_2\subseteq W_1$.

假设 $W_1\not\subseteq W_2$，取 $\vec{v_1}\in W_1$，$\vec{v_1}\notin W_2$. $\forall\ \vec{v_2}\in W_2$，

由于 $W_1\cup W_2$ 是子空间，则 $\vec{v_1}+\vec{v_2}\in W_1\cup W_2$.

$\Rightarrow \vec{v_1}+\vec{v_2}\in W_1$ 或者 $\vec{v_1}+\vec{v_2}\in W_2$.

若 $\vec{v_1}+\vec{v_2}\in W_1 \Rightarrow \vec{v_2}\in W_1 \Rightarrow W_2\subseteq W_1$

若 $\vec{v_1}+\vec{v_2}\in W_2 \Rightarrow \vec{v_1}\in W_2 \Rightarrow$ 矛盾.

幻方中的线性代数.

定义. 任给矩阵 $A\in M_n(Q)$, 若 A 的任一行元素之和, 任一列元素之和皆为某一个固定的数 $\sigma(A)$, 则称 A 为半幻方 (semi-magic square). 设 A 是半幻方, 如果 A 的主对角线上元素之和以及副对角线上元素之和都等于 $\sigma(A)$, 则称 A 是幻方 (magic square).

例. $A=\begin{pmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&1&1\\1&2&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}$

幻方　　　半幻方　　　幻方

$SMag_n(Q)=\{A\in M_n(Q)\mid A\text{为半幻方}\}$

$Mag_n(Q)=\{A\in M_n(Q)\mid A\text{为幻方}\}$　　$A=(a_{ij})_{n\times n}$

$SMag_n^0(Q)=\{A\in SMag_n(Q)\mid \underbrace{Tr(A)}_{Tr(A)=a_{11}+\cdots+a_{nn}}=0\}$

$Mag_n^0(Q)=\{A\in Mag_n(Q)\mid Tr(A)=0\}$

$SMag_n^*(Q)=\{A\in SMag_n(Q)\mid \sigma(A)=0\}$

$Mag_n^*(Q)=\{A\in Mag_n(Q)\mid \sigma(A)=0\}$

均为 $M_n(Q)$ 的线性子空间

注: $f:\ Q^{n^2}\to M_n(Q)$

$\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{n1}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{n1}\\ \vdots\\ a_{nn}\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$

~~f有~~ Q^{n^2} 线性同构于 $M_n(Q)$ 即 Q^{n^2} 中的线性子空间在 f 作用下, 是 $M_n(Q)$ 中的线性子空间

解空间法

验证 $SMag_n(Q)$ 是子空间. 设 $A=(a_{ij})\in M_n(Q)$, 则

$A\in SMag_n(Q)\iff \sum_{j=1}^n a_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{1,k},\ i=2,3,\cdots,n$ 和 $\sum_{i=1}^n a_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{1,k},\ j=1,2,3,\cdots,n.$ (共有 $2n-1$ 个方程)

这是一个关于 a_{ij}, $i=1,\cdots,n$, $j=1,\cdots,n$ 个 (n^2个) 未知数的齐次线性方程组

$SMag_n(Q)$ 正好是上述方程组在 $M_n(Q)$ 中的解空间.

对于 $Mag_n(Q)$, 在上述方程组(1)的基础上还需再加入两个方程. (对角线元素的限制).

$\sum_{i=1}^n a_{ii}=\sum_{k=1}^n a_{1,k}$ 和 $\sum_{i=1}^n a_{i,n+1-i}=\sum_{k=1}^n a_{1,k}$..

命题1 $SMag_n(Q)=SMag_n^0(Q)\oplus\langle S\rangle$.　　$S=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\in Mag_n(Q)$.

$SMag_n(Q)=SMag_n^*(Q)\oplus\langle S\rangle$.

$Mag_n(Q)=Mag_n^0(Q)\oplus\langle S\rangle$.

$Mag_n(Q)=Mag_n^*(Q)\oplus\langle S\rangle$.

例 $n=2$. $\forall\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\in SMag_2(Q)$, $a_{11}+a_{12}=a_{11}+a_{21}\Rightarrow a_{12}=a_{21}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&a\\a&a_2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow a_{11}+a=a+a_{22}\Rightarrow a_{11}=a_{22}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&a\\a&b\end{pmatrix}$, $a\in Q$

$\therefore SMag_2(Q)=\langle D\rangle\oplus\langle E\rangle$

$=\begin{pmatrix}b&\\&b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}&a\\a&\end{pmatrix}$

$=b\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}&a-b\\a-b&\end{pmatrix}$

+ ①

$\forall \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in Mag_2(Q)$，还需 $a=b$

$\Rightarrow Mag_2(Q)=\langle S\rangle$.

Pf: $\forall A\in SMag_n(Q)$，令 $A_0=A-\frac{Tr(A)}{n}S$，$A_0\in SMag_n(Q)$（$SMag_n(Q)$为线性空间，$A,S\in SMag_n(Q)$）

①

则 $Tr(A_0)=Tr(A)-\frac{Tr(A)}{n}\cdot\underbrace{Tr(S)}_{=n}$（Tr为线性映射）

$=0$

$\Rightarrow A_0\in SMag_n^0(Q)$

$\Rightarrow SMag(Q)\subseteq SMag_n^0(Q)+\langle S\rangle$.

又∵ $SMag_n^0(Q)$ 与 $\langle S\rangle$ 均为 $SMag(Q)$的子空间，故 $SMag_n^0(Q)+\langle S\rangle\subseteq SMag_n(Q)$

$\Rightarrow SMag(Q)=SMag_n^0(Q)+\langle S\rangle$

$\forall A\in SMag_n^0(Q)\cap\langle S\rangle$ $\Rightarrow A=a\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，$a\in Q$，且 $na=0$，$n\neq 0$ $\Rightarrow a=0$

∴ $SMag_n^0(Q)\cap\langle S\rangle=\{0\}$

从而 $SMag_n(Q)=SMag_n^0(Q)\oplus\langle S\rangle$

② 令 $A_*=A-\frac{\sigma(A)}{n}S$

$\sigma(A_*)=\sigma(A)-\frac{\sigma(A)}{n}\cdot n=0$（σ是线性映射）

$\Rightarrow A_*\in SMag_n^*(Q)$

$\Rightarrow A\in SMag_n^*(Q)\oplus\langle S\rangle$

$\Rightarrow SMag_n(Q)=SMag_n^*(Q)+\langle S\rangle$

由于 $SMag_n^*(Q)\cap\langle S\rangle=\{0\}$

$\Rightarrow SMag_n(Q)=SMag_n^*(Q)\oplus\langle S\rangle$.

③ ④与① ②类似.

$E=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 半幻方，$D=\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & ⋰ & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$ 半幻方

$n=2$，$SMag_2(Q)=\langle E\rangle\oplus\langle D\rangle$

$Mag_2(Q)=\langle S\rangle$.

引理1：设 U 是线性空间，V,W,X,Y是 U 的子空间，如果 $U=V\oplus W$ 且 $V=X\oplus Y$，则 $U=X\oplus Y\oplus W$.

Pf: 设 $\vec{u}\in U$，则 $\exists!\ \vec{v}\in V$ 和 $\vec{w}\in W$，使得 $\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$.

对于 $\vec{v}\in V$，$\exists!\ \vec{x}\in X$，$\vec{y}\in Y$，使得 $\vec{v}=\vec{x}+\vec{y}$

于是$\exists!$ 的 $\vec{x}\in X$，$\vec{y}\in Y$ 和 $\vec{w}\in W$，使得 $\vec{u}=\vec{x}+\vec{y}+\vec{w}$.

+②

…的子空间且 $W_1\cap W_2=\{0\}$，若有 $\dim W_1+\dim W_2\geq \dim V$，则有 $V=W_1\oplus W_2$

证: $\dim(W_1\oplus W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2)\geq \dim(V)-0=\dim V$

又由于 $W_1\oplus W_2\subseteq V$

$\Rightarrow V=W_1\oplus W_2$.

命题 2. $SMag_n(Q)=Mag_n(Q)\oplus\langle E\rangle\oplus\langle D\rangle$. , $n\geq 3$

证: 由于 $\langle E\rangle\cap\langle D\rangle=\{0\}$，故 $W=\langle E\rangle\oplus\langle D\rangle$ 为直和，且 $\dim(W)=2$

$\forall A=(a_{ij})_{n\times n}\in SMag_n(Q)$，则
$$\begin{cases}\sum_{j=1}^n a_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{1,k}, & i=2,3,\cdots,n\\ \sum_{i=1}^n a_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{1,k}, & j=1,2,\cdots,n\end{cases}\quad (1)$$

$\dim(SMag_n(Q))$ 对应方程组 (1) 的解空间个数，

设 A_1 为 (1) 的系数矩阵，且经过初等行变换后，变为阶梯形，

$\dim(SMag_n(Q))=n^2-\mathrm{rank}(A_1)$.

$\forall A\in Mag_n(Q)$ 还需满足两个条件，$\sum_{i=1}^n a_{ii}=\sum_{k=1}^n a_{1,k}$，和 $\sum_{i=1}^n a_{i,n+1-i}=\sum_{k=1}^n a_{1,k}$.

故在 A_1 的基础上往后增加两行元素，成为新矩阵 B.

显然 $\boxed{\mathrm{ran}(B)\leq \mathrm{ran}(A_1)+2}$

$\dim(Mag_n(Q))=n^2-\mathrm{ran}(B)\geq(n^2-\mathrm{ran}(A_1))-2=\dim(SMag_n(Q))-2$

此外，W 与 $Mag_n(Q)$ 均为 $SMag_n(Q)$ 的子空间，且 $\dim(Mag_n(Q))+\dim(W)\geq\dim(SMag_n(Q))$.

下证 $Mag_n(Q)\cap W=\{0\}$

设 $A\in Mag_n(Q)\cap W$，则 $A=\lambda E+uD$, $A=\begin{pmatrix}\lambda & & u\\ & \ddots & \\ u & & \lambda\end{pmatrix}$

$A\in Mag_n(Q)$，则两对角线元素相同，从而 $\begin{cases}n\lambda=nu, & n\text{为偶数}\quad \begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & & u\\ & ⋰ & \\ u & & \end{pmatrix}\\ n\lambda+u=nu+\lambda, & n\text{为奇数}\quad \begin{pmatrix}\lambda & \\ & \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & u\\ u & \end{pmatrix}\end{cases}$

$\Rightarrow\lambda=u\Rightarrow A=\begin{pmatrix}\lambda & & \lambda\\ & \ddots & \\ \lambda & & \lambda\end{pmatrix}$，假设 $\lambda\neq 0$，由每一行元素之和等于对角线元素之和有，

$\xrightarrow[\text{等于对角线元素之和}]{\text{每一行元素之和}}\begin{cases}2\lambda=n\lambda, & n\text{为偶数}\\ 2\lambda=(n+1)\lambda, & n\text{为奇数}\end{cases}\Rightarrow n=1,2$，矛盾.

故 $\lambda=u=0$

由引理2可得，$SMag_n(Q)=Mag_n(Q)\oplus W\overset{\text{引理1}}{=\!=}Mag_n(Q)\oplus\langle D\rangle\oplus\langle E\rangle$.

+⑤

扫描全能王 创建

定理 $\dim(SMag_n(Q)) = n^2-2n+2$

$\dim(Mag_n(Q)) = n^2-2n$, $n\geq 2$!

证：由命题1可知，$SMag_n(Q) = SMag_n^*(Q) + \langle S\rangle$

对于 $\forall A\in SMag_n^*(Q)$，

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ & M & & a_{2n} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{n-1,n} \\ \hline a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{array}\right)$$

任意确定子矩阵 $M\in M_{n-1}(Q)$ 后，由于 $\sigma(A)=0$

则 $a_{n,1},\cdots,a_{n,n-1}$, $a_{1n},\cdots,a_{n-1,n}$, a_{nn} 唯一确定下来.

$a_{i,n} = -(a_{i,1}+\cdots+a_{i,n-1})$, $i=1,2,\cdots,n-1$. (前n-1行元素和为0)

$a_{n,j} = -(a_{1,j}+a_{2,j}+\cdots+a_{n-1,j})$, $j=1,2,\cdots,n-1$. (前n-1列元素和为0)

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,n} = -\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i,1}+\cdots+a_{i,n-1})$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}$$

$$= -\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}\right) = -\sum_{j=1}^{n-1}(a_{1,j}+a_{2,j}+\cdots+a_{n-1,j}) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j}$$

$\therefore$ $a_{n1},\cdots,a_{n,n-1}$ 确定下来之后，由最后一行为0，确定 a_{nn}.

易知 M 的一组基底为 $\{E_{ij} \mid i,j=1,\cdots,n-1\}$.

$\dim(SMag_n^*(Q)) = (n-1)^2$.

从而 $\dim(SMag_n(Q)) = (n-1)^2+1 = n^2-2n+2$.

结合命题2，得 $\dim(Mag_n(Q)) = n^2-2n$, $n\geq 3$.

$n=2$, $Mag_2(Q) = \langle S\rangle$, $\dim(Mag_2(Q)) = 1$.