第十一次习题课

一、作业解答及需要注意的问题

hw1.

$$X=\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix},\quad 证\ |X|=|A+B|\cdot|A-B|$$

证：

$$|X|=\begin{vmatrix} A-B & B-A \\ B & A \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A-B & 0 \\ 0 & E_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E_n & -E_n \\ B & A \end{vmatrix}$$

$$=|A-B|\cdot\begin{vmatrix} E_n & 0 \\ B & B+A \end{vmatrix}$$

$$=|A-B|\cdot|A+B|$$

hw2.

$$A_n=\begin{pmatrix} x+y & xy & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{pmatrix}$$

解：

$n=1 \quad |A_1|=xy$

$n=2 \quad |A_2|=(x+y)^2-xy=x^2+xy+y^2$

$n\geq 3 \quad |A_n|=(x+y)|A_{n-1}|-xy|A_{n-2}|$

$(|A_n|-x|A_{n-1}|)=y(|A_{n-1}|-x|A_{n-2}|)$.

$$\Longrightarrow\quad |A_n|=\begin{cases} \dfrac{x^{n+1}-y^{n+1}}{(x-y)} & x\neq y. \\ (n+1)x^n & x=y \end{cases}$$

$\square$.

eg1. $(n\geqslant 2)$

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}$$

分析：与Vandermonde不同的是第n行不是$(x_1^{n-1},\cdots,x_n^{n-1})$

为了利用Vandermonde计算，在原行列式右边加一列

$(1,y,y^2,\cdots,y^{n-2},y^{n-1},y^n)'$，在第n-1行和第n行之间

插入一行 $(x_1^{n-1},\cdots,x_n^{n-1})$。第$(n,n+1)$元余子式即为$D_n$。

$$\widetilde{D}_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n & y^n \end{vmatrix}$$

$$=(y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j).$$

$\widetilde{D}_{n+1}$的完全展开式中y^{n-1}的系数为

$$-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$$

$$\qquad\qquad\underset{\widetilde{D}_n}{\shortparallel}$$

$$\therefore D_n=(-1)^{n(n+1)}\widetilde{D}_n.$$

二、伴随矩阵

hw3. (1). $(\lambda A)^\vee=\lambda^{n-1}A^\vee$

令$B=\lambda A$ $\qquad B_{ij}=\lambda^{n-1}A_{ij}$

$$B^\vee=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & \cdots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \cdots & B_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{1n} & B_{2n} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix}=\lambda^{n-1}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=\lambda^{n-1}A^\vee$$

(2). 设 $B=A^t$

$$B^\vee=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & \cdots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \cdots & B_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{1n} & B_{2n} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=(A^\vee)^t$$

eg2. $(A^\vee)^\vee=|A|^{n-2}A \quad n\geq 2.$

当 $n=2$ 时 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 $(A^\vee)^\vee=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}^\vee$

$$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=A$$

注: $A^{-1}=\dfrac{A^\vee}{|A|}$ 二阶求逆直接写出逆矩阵.

$n\geq 3$ ① $|A|\neq 0$

由 $AA^\vee=|A|E$ 可得 $A^\vee=|A|A^{-1}$

$$(A^\vee)^\vee=(|A|A^{-1})^\vee=\Big||A|A^{-1}\Big|(|A|A^{-1})^{-1}$$

$$=|A|^n|A|^{-1}\cdot|A|^{-1}A=|A|^{n-2}A.$$

② $|A|=0$. 要证 $(A^\vee)^\vee=0$

若 $rank(A)=n-1$, 则 $rank(A^\vee)=1<n-1$

$\therefore rank((A^\vee)^\vee)=0 \Longrightarrow (A^\vee)^\vee=0$

若 $rank(A)<n-1$, 则 $rank(A^\vee)=0$

i.e. $A^\vee=0 \Longrightarrow (A^\vee)^\vee=0.$

hw4. 若 $|A|=0$. 考虑 $Ax=0$ 有非零解 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

则 $\exists k$ s.t $|x_k|\geq|x_i|$ $i\neq k$, $|x_k|\neq 0$.

$$AX=0 \Rightarrow a_{kk}x_k + \sum_{j\neq k} a_{kj}x_j = 0$$

$$\Rightarrow |a_{kk}|\cdot|x_k| = |\sum_{j\neq k} a_{kj}x_j|$$

$$\leq \sum_{j\neq k} |a_{kj}|\cdot|x_j|$$

$$< \sum_{j\neq i} \frac{1}{n-1} |a_{kk}||x_j| \leq |a_{kk}|\cdot|x_k|$$

$$\Rightarrow |a_{kk}|\cdot|x_k| < |a_{kk}|\cdot|x_k| \quad 矛盾. \quad \square$$

方法二：假如 $|A|=0$ 即 $rank(A)<n$.

则 A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关.

从而有一组不全为0的实数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ s.t.

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

设 $|k_l| = \max\{|k_1|, \cdots, |k_n|\}$

去证 $|a_{ll}| \leq (n-1)|a_{lj}|$，矛盾.

补充：摄动法.

摄动方法作为一般的数学方法，利用连续函数的性质将一般矩阵问题转化为非退化矩阵.

prop：设 A 是一个 n 阶矩阵，$\exists\, a>0$ s.t $\forall\, 0<t<a$. 矩阵 $t_kE_n + A$ 是一个非退化矩阵。 [证明略].

原理：由 prop 可知，$\exists\, \{t_k\}$ s.t $t_kE_n + A$ 为非退化矩阵。当一个问题对于非退化矩阵成立，故 $t_kE_n + A$ 成立. 并且该问题关于 t_k 连续，那么 $t_k \to 0$. 则对 A 也成立。

设 $t\in \mathbb{R}^+$, $B_n = tE_n + A_n$ 则

$$\det(B_n) = t^n + a_{n,n-1}t^{n-1} + \cdots + a_{n,1}t + a_{n,0}.$$

hw6. 设F是任意的域，$A\in M_n(F)$，证明 $A^\vee B^\vee=(BA)^\vee$.

证：1). A, B都可逆

则 $A^\vee=|A|A^{-1}$, $B^\vee=|B|B^{-1}$

$$A^\vee B^\vee=|A|A^{-1}|B|B^{-1}=|A||B|A^{-1}B^{-1}=|BA|(BA)^{-1}=(BA)^\vee$$

2) 设A, B中至少有一个不可逆

令t是F上的未定元. 则$|tE+A|$和$|tE+B|$是$F[t]$中的非零多项式. 于是，$tE+A$和$tE+B$是整环$F[t]$的分式域的可逆矩阵.

故 $(tE+A)^\vee(tE+B)^\vee=((tE+B)(tE+A))^\vee$

注意到上述是n^2个关于$F[t]$的多项式等式.

故令$t=0$ n^2个等式成立.

并且这些等式的构造只涉及多项式的加法和乘法且赋值映射是环同态. 所以我们可以对上述矩阵等式直接赋值得到 $A^\vee B^\vee=(BA)^\vee$。

hw5. 证：令 $Q(x,y)=(x,y)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}+(b_1,b_2)\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}+c$

$D=\{Q(x,y)=0\}$ $\qquad \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}_{=T}\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}$

$$Q(x,y)=0 \iff (x',y')T^tAT\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}+(b_1,b_2)T\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}+c=0.$$

$$\Rightarrow D'=\{Q'(x',y')=(x',y')T^tAT\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}+(b_1,b_2)T\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}+c\}=0$$

$$\Longrightarrow A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = T^t A T \qquad (b_1', b_2') = (b_1, b_2)T. \quad c' = c.$$

令 $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix}$

$$F' = \begin{pmatrix} T^tAT & T^tb \\ b^tT & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注: 二次曲面:

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{23}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

$$= \Phi(x, y, z). \qquad \text{“}z = 1\text{”}$$

三、行列式的应用

1. Cramer 法则

2. 子式和矩阵的秩

注: 有关子秩的定义:

任意矩阵的秩等于它的非零子式的阶数.

3. 加边子式法:

子式 $\tilde{M}$ 叫作 M 的加边, 若 M 是由 $\tilde{M}$ 去掉一端的行(第一行或最后一行), 以及一端的列得到的.

Thm1: 在计算 A 的秩, 可由 A 中较小阶的子式转到较大阶的子式. 如果已找到 A 的一个 r 阶子式 $M \neq 0$, 那么仅需计算 $r+1$ 阶子式, 即子式 M 的加边, 如果它们都等于零, 则 $\operatorname{rank} A = r$.

四、补充.

eg.

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3 \\ c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3 & c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3 \end{pmatrix}$$

$$|AB|=\begin{vmatrix} a\cdot b & a\cdot d \\ c\cdot b & c\cdot d \end{vmatrix}=(a\times c)\cdot(b\times d)$$

根据拉格朗日恒等式

$$=\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}+\left(-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}\right)\left(-\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}\right)+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$=A\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}B\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 1, & 3 \end{pmatrix}B\begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$$

$$+A\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 3 \end{pmatrix}B\begin{pmatrix} 2, & 3 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$$

Thm2: (Binet - Cauchy 公式)

设 $A=(a_{ij})$、$B=(b_{ij})$ 分别是数域 K 上的 $s\times n$、$n\times s$ 矩阵.

(1) 若 $s>n$，则 $|AB|=0$.

(2) 若 $s<n$，则

$$|AB| = \sum_{1\le \nu_1<\cdots<\nu_s\le n} A\begin{pmatrix}1, & \cdots, & s\\ \nu_1, & \cdots, & \nu_s\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}\nu_1, & \cdots, & \nu_s\\ 1, & \cdots, & s\end{pmatrix}.$$

证明：(1) 设 $s>n$，则 $\mathrm{rank}(AB)\le \mathrm{rank}(A)\le n<s$.

又 AB 是 s 级矩阵，

$\therefore$ AB 不是满秩矩阵，从而 $|AB|=0$.

(2). 设 $s<n$. 考虑 $s+n$ 阶分块矩阵

$$\begin{pmatrix}E_n & B\\ 0 & AB\end{pmatrix}$$

则 $\begin{vmatrix}E_n & B\\ 0 & AB\end{vmatrix} = |E_n||AB| = |AB|$.

$$\begin{pmatrix}E_n & B\\ 0 & AB\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}E_n & B\\ -A & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}E_n & 0\\ -A & E_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & B\\ 0 & AB\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E_n & B\\ -A & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}E_n & B\\ 0 & AB\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}E_n & B\\ -A & 0\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}E_n & B\\ -A & 0\end{vmatrix} \xlongequal[\text{按定义展开}]{\text{后}s\text{行}} \sum_{1\le\nu_1\le\cdots\le\nu_s\le n} (-A)\begin{pmatrix}1, & \cdots, & s\\ \nu_1, & \cdots, & \nu_s\end{pmatrix}$$

$$\times (-1)^{(n+1+\cdots+n+s)+(\nu_1+\cdots+\nu_s)} |(\varepsilon_{\mu_1},\cdots,\varepsilon_{\mu_{n-s}}, B)|.$$

其中 $\{\mu_1,\cdots,\mu_{n-s}\}=\{1,\cdots,n\}\setminus\{\nu_1,\cdots,\nu_s\}$ 且 $\mu_1<\cdots<\mu_{n-s}$.

把 $|(\varepsilon_{\mu_1},\cdots,\varepsilon_{\mu_{n-s}}, B)|$ 按前 $n-s$ 列展开.

$$\begin{array}{r|cccccc|}
 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\
 & \vdots & & \vdots & & & \\
 & 0 & \cdots & 0 & & & \\
\mu_1 \rightarrow & 1 & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots \\
 & 0 & \cdots & 0 & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & & \\
 & 0 & \cdots & 0 & & & \\
 & 0 & \cdots & 1 & & & \\
 & 0 & \cdots & 0 & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & & \\
 & 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{ns}
\end{array}$$

$$= |E_{n-s}| (-1)^{(\mu_1 + \cdots \mu_{n-s}) + (1 + \cdots + (n-s))} B\begin{pmatrix} \nu_1, & \cdots, & \nu_s \\ 1, & \cdots & ,s \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{(\mu_1 + \cdots + \mu_{n-s})} (-1)^{\frac{1}{2}(1+n-s)(n-s)} B\begin{pmatrix} \nu_1, & \cdots & \nu_s \\ 1, & \cdots, & s \end{pmatrix}$$

综上 $\begin{vmatrix} E_n & B \\ -A & 0 \end{vmatrix}$

$$= \sum_{1 \le \nu_1 < \cdots < \nu_s \le n} (-1)^s A\begin{pmatrix} 1, & \cdots, & s \\ \nu_1, & \cdots, & \nu_s \end{pmatrix} (-1)^{\frac{1}{2}(1+s)s + ns + (\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_s)}$$

$$\cdot (-1)^{(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{n-s})} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}(1+n-s)(n-s)} B\begin{pmatrix} \nu_1, & \cdots, & \nu_s \\ 1, & \cdots & ,s \end{pmatrix}$$

由于 $(-1)^{\frac{1}{2}(1+s)s + ns + (\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_s) + \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}(1+n-s)(n-s)}$

$$= (-1)^{s^2 + s + n^2 + n} = 1.$$

故: $\begin{vmatrix} E_n & B \\ -A & O \end{vmatrix} = \sum_{1\le \nu_1<\cdots<\nu_s\le n} A\begin{pmatrix} 1, & \cdots, & s \\ \nu_1, & \cdots, & \nu_s \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} \nu_1, & \cdots, & \nu_s \\ 1, & \cdots, & s \end{pmatrix}$

$\therefore |AB| = \sum_{1\le \nu_1<\cdots<\nu_s\le n} A\begin{pmatrix} 1, & \cdots, & s \\ \nu_1, & \cdots, & \nu_s \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} \nu_1, & \cdots, & \nu_s \\ 1, & \cdots, & s \end{pmatrix}$

Binet-Cauchy 公式

$$(A^\vee)_{ij} = A_{ji} = (-1)^{i+j}\sum_{k=1}^{n} M^A_{jk} M^B_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (B^\vee)_{ik} (A^\vee)_{kj}$$

$$= (B^\vee A^\vee)_{ij}.$$

Thm 3. (Laplace 定理). n 级矩阵 $A=(a_{ij})$ 中, 取定第 $i_1, \cdots, i_k$ 行 $(1\le k<n)$, 其中 $i_1<i_2<\cdots<i_k$, 则 $|A|$ 等于这 k 行元素形成的所有 k 阶子式与它们自己的代数余子式的乘积之和, 即

$$|A| = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1, & \cdots & i_k \\ j_1, & \cdots & j_k \end{pmatrix} (-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)} A\begin{pmatrix} i'_1, & \cdots, & i'_{n-k} \\ j'_1, & \cdots, & j'_{n-k} \end{pmatrix}$$