行列式计算常见方法

① 消元计算. eg. 作业 1、2.

② 按行列展开计算.

③ 按抽象定义计算 (低阶, 证明行列式性质)

④ 归纳法计算. eg: 范德蒙德, $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & & \\ c & a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & b & \\ & & c & a & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}$

⑤ 分块矩阵分块技巧. $M=\begin{pmatrix} A & C \\ & B \end{pmatrix}$ $|M|=|A|\cdot|B|$.

⑥ 拆分法 eg:

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & \cdots & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)D_{n-1}+b(a-c)^{n-1}$$

⑦ 加行加列

eg1. $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ & & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

eg2 $a=\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & & x_2^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n^2 & & x_n^n \end{vmatrix}$, $b=\begin{vmatrix} 1 & y & y^2 & \cdots & y^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=1-y\cdot a+y^2\cdot(\ )+\cdots+y^n(\quad)$

* ⑧利用复数知识来简便计算

eg
$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \cos\theta_1 & & \cos\theta_n \\ \vdots & & \vdots \\ \cos(n-1)\theta_1 & & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k \\ &= \cos^k\theta + \mathrm{i}C_k^1\cos^{k-1}\theta\sin\theta - C_k^2\cos^{k-2}\theta\sin^2\theta + \cdots. \end{aligned}$$

比较实部并将 $\sin^2\theta$ 用 $1-\cos^2\theta$ 代替便可将 $\cos k\theta$ 表示为 $\cos\theta$ 的多项式, 且最高次项 $\cos^k\theta$ 的系数为 2^{k-1} $(1 + C_k^2 + C_k^4 + \cdots = 2^{k-1})$. 用这个事实, 依次将行列式各列表示成 $\cos\theta_j$ 的多项式. 类似上题, 可以将后面各列的低次项消去, 提出 2 的某个幂后得到一个 Vander Monde 行列式:

$$|\boldsymbol{A}| = 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos^2\theta_1 & \cdots & \cos^{n-1}\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos^2\theta_2 & \cdots & \cos^{n-1}\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos^2\theta_n & \cdots & \cos^{n-1}\theta_n \end{vmatrix}.$$

因此

$$|\boldsymbol{A}| = 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\prod_{1\le i<j\le n}(\cos\theta_j - \cos\theta_i). \square$$

* ⑨ Binet-Cauchy 公式与 Laplace 展开.

1、 计算下面行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad |C|, C = (c_{ij})_{n\times n}, c_{ij} = \max\{i,j\}.$$

本题运用行列式在初等变化下性质来计算

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -1\cdot(-13)\cdot 16\cdot \frac{3}{2} = 312.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{2,3,4\text{行}+\text{到第}1\text{行}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -4\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -16$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ 1 & \cdots & & & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}\cdot n.$$

2、 计算下面 $n+1$ 阶矩阵的行列式:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n+1 \end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=n!$$

3、 给定实数域上的 n 阶方阵

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

其中 $a_{ij}(t)$ 为开区间 (a,b) 上的可微函数. 证明: $|A(t)|$ 为 (a,b) 上的可微函数, 且

$$\frac{d}{dt}|A(t)|=\sum_{i=1}^{n}|A_i(t)|,$$

其中

$$A_i(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dt}a_{i1}(t) & \frac{d}{dt}a_{i2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Pf: $|A(t)| = \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} \Rightarrow |A(t)|$ 可微

$$\frac{d}{dt}|A(t)| = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\right) = \sum_{\sigma\in S_n}\frac{d}{dt}\left(\epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\right)$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n}\left(\sum_{i=1}^{n}\epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)}\cdots\frac{d}{dt}a_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots\frac{d}{dt}a_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}|A_i(t)|.$$

□

4、设 A, B, C 分别为 $m\times n, n\times p, p\times q$ 矩阵. 证明:

$$\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)\le\operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B).$$

(提示: 考虑分块矩阵 $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC\end{pmatrix}$.)

Pf: $$\begin{bmatrix} E_m & -A \\ 0 & E_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & BC\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -ABC \\ B & BC\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underset{m\times p}{0} & \underset{m\times q}{-ABC} \\ \underset{n\times p}{B} & \underset{n\times q}{BC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_p & -C_{p\times q} \\ 0 & E_q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -ABC \\ B & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BC\end{pmatrix} \leqslant \operatorname{rank}\begin{pmatrix} AB & \\ B & BC\end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & -ABC \\ B & 0\end{pmatrix} = \operatorname{rank}(B)+\operatorname{rank}(ABC)$$ □

5、 给定实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} \underset{r\times r}{A_1} & \underset{r\times s}{A_2} \\ 0 & \underset{s\times s}{A_3} \end{pmatrix}$$

其中 A_1 为 r 阶方阵，如果 A 与 A^t 可交换，证明：$A_2 = 0$.

$$A^t = \begin{pmatrix} A_1^t & 0 \\ A_2^t & A_3^t \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} A_1 \cdot A_1^t + A_2 \cdot A_2^t & A_2 \cdot A_3^t \\ A_3 \cdot A_2^t & A_3 \cdot A_3^t \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} A_1^t A_1 & A_1^t A_2 \\ A_2^t A_1 & A_2^t A_3 + A_3^t A_3 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot A = AA^t \Rightarrow A_1 \cdot A_1^t + A_2 \cdot A_2^t = A_1^t \cdot A_1$$

$$\Rightarrow tr(A_1 \cdot A_1^t + A_2 \cdot A_2^t) = tr(A_1^t A_1)$$

$$\Rightarrow tr(A_2 \cdot A_2^t) = 0$$

由上次作业第4题(同样证法)，

$$\Rightarrow A_2 = 0. \qquad \square$$

6、 整数 1798,2139,3255,4867 可以被 31 整除，不用计算，证明下面行列式

$$记\ a=\begin{vmatrix}1&7&9&8\\2&1&3&9\\3&2&5&5\\4&8&6&7\end{vmatrix}$$

可以被 31 整除.

$$a=\begin{vmatrix}1&7&9&8\\2&1&3&9\\3&2&5&5\\4&8&6&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&7&9&1798\\2&1&3&2139\\3&2&5&3255\\4&8&6&4867\end{vmatrix}=|B|$$

$$\Rightarrow \quad a=\sum_{\sigma\in S_4}\varepsilon_\sigma b_{\sigma(1)1}b_{\sigma(2)2}b_{\sigma(3)3}b_{\sigma(4)4}.$$

$$31\mid b_{i4} \quad 1\le i\le 4$$

$$\Rightarrow 31\mid a. \qquad \square$$

补充：摄动法

求解矩阵 A 的问题时，可以对 A 作一些扰动来求解，eg $A+\lambda E$.

Prop：对 $\forall$ 方阵 A，$\exists \varepsilon>0$ s.t. $E+tA$ 可逆，$\forall |t|<\varepsilon$.

Pf：$E+tA$ 可逆 $\Rightarrow g(t)=|E+tA|\neq 0$.

$g(0)=|E|=1\neq 0$，$g(t)=\sum\limits_{\sigma\in S_n}(\delta_{1\sigma(1)}+ta_{1\sigma(1)})\cdots(\delta_{n\sigma(n)}+ta_{n\sigma(n)})$

$g(t)$ 为关于 t 的多项式，次数 $\leq n$.

$\Rightarrow g(t)$ 连续，$g(0)=1 \Rightarrow \exists \varepsilon>0$ s.t. $|g(t)|\neq 0$，$|t|<\varepsilon$. $\square$

Cor：$\forall$ 矩阵 A，$\exists k_0\in\mathbb{R}^+$ s.t. $A+kE$ 可逆，$|k|>k_0$.

应用：设 $A=(a_{ij})$，

① 若 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$，$i=1,\cdots,n$. 则 $|A|\neq 0$.

② 若 $a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|\geq 0$，$i=1,\cdots,n$，则 $|A|>0$.

Pf：① 若 $|A|=0$，$\Rightarrow \exists X\in\mathbb{R}^n$ s.t. $A\cdot X=0$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\neq 0$

设 $x_t=\max\{|x_i|\}$

$a_{t1}x_1+\cdots+a_{tn}x_n=0 \Rightarrow a_{tt}x_t=-\sum\limits_{j\neq t}a_{tj}x_j$

$\Rightarrow |a_{tt}||x_t|\leqslant\sum\limits_{j\neq t}|a_{tj}||x_j|\leq\sum\limits_{j\neq t}|a_{tj}||x_t|$

$\Rightarrow |a_{tt}|\leqslant\sum\limits_{j\neq t}|a_{tj}|$ 矛.

② ① $\Rightarrow |A|\neq 0$ 若 $|A|<0$

考虑 $f(t)=|tE+A|$，$f(t)$ 为一最高项系数为 1 的多项式.

$\Rightarrow f(t)>0$ 对于 $|t|>M$. $f(0)<0$.

$\Rightarrow \exists a$ s.t. $|aE+A|=0$，然 $aE+A$ 仍满足条件 ①，矛.

2、设A为实矩阵，证明

①若$|A|<0$，则$\exists$非零实向量X s.t. $X^tAX<0$.

②若对$\forall X$，$X^tAX>0$，则$|A|>0$.

Pf：① 同理考虑 $f(t)=|tE+A|$，$\exists M>0$ s.t. $|t|>M$ $f(t)>0$.

$f(0)<0 \Rightarrow \exists a>0$ s.t. $|aE+A|=0$.

$\Rightarrow \exists X\neq 0$ s.t. $(aE+A)X=0$.

$\Rightarrow AX=-aX$

$\Rightarrow X^tAX=-aX^tAX<0$.

② ①$\Rightarrow |A|\geq 0$. 若$|A|=0$ $\exists X\neq 0$, s.t. $AX=0$.

$\Rightarrow X^tAX=0$ ↯. □