第九次习题课

一. 期中试卷答疑及分析

1. 置换：写成不相交循环；阶；奇偶性

2. (1). $\varphi: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$A_\varphi = (\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \varphi(\vec{e_3}), \varphi(\vec{e_4}))$

直接确定 A 为 3×4 阶矩阵.

$$A_\varphi = \varphi(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}) = (\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

与之前所做习题不同的是：习题中用坐标来表示；
考试用标准基来表示。

(2). $\dim(\mathrm{sol}(H)) + \mathrm{rank}(A) = n$.

$\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}^4)$.

由计算

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可知 $\mathrm{rank}(A_\varphi) = 2$, $\mathrm{im}(\varphi) = V_c(A)$, $\therefore \dim(\mathrm{im}(\varphi)) = 2$

由对偶定理可知: $\dim(\ker(\varphi)) = 2$.

(3). ∵ 行变换保留列空间

∴ $\mathrm{im}(\varphi)$ 的一组基为 A_φ 的任意两列线性无关的向量.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4 \\ 3x_2 = x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

$\ker(\varphi)$ 的一组基: $(-1, 1, 0, 1)^t$

$(-1, 1/3, 1, 0)^t$.

4. U是$\mathbb{R}^n$中子空间.

(i) 对$x, y \in \mathbb{R}^n$, $x-y \in U$, 称 $x \sim_U y$.

1) 自反性: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x-x=0 \in U$ ($\because U$为子空间)

$x \sim_U x$.

2) 对称性: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $x-y \in U \Rightarrow -(x-y) \in U$

$\Rightarrow y-x \in U$

故 $x \sim_U y$, $y \sim_U x$.

3) 传递性: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x-y \in U$, $y-z \in U$

$\Rightarrow (x-y)+(y-z) \in U$

故由 $x \sim_U y$, $y \sim_U z \Rightarrow x \sim_U z$.

(ii) x关于$\sim_U$的等价类记为$\overline{x}$.

要证: $\overline{x} = \{x+u \mid u \in U\}$.

$\overline{x} \subset x+U$: $\forall y \in \overline{x}$, $y-x \in U$

记 $y = x + \underbrace{(y-x)}_{\in U}$. 故 $y \in x+U$.

$\overline{x} \supset x+U$: $\forall y \in x+U$. 则$\exists u$ s.t $y=x+u$.

$y-x=u \in U$. $\Rightarrow y \sim_U x$, $y \in \overline{x}$.

故 $\overline{x} = \{x+U\}$.

$$\mathbb{R}^n/\sim_U \text{或} \ \mathbb{R}^n/U = \cdot + U$$ (实则为关于$\sim_U$的一个划分).

5. (i) 由Bezout关系: $\exists u, v \in \mathbb{Z}$, s.t $um+vn=1$.

故 $m(uk)+n(vk)=k$. 由此可知 $x=uk$, $y=vk$.

(ii) 不满足数乘

6. (i) $V+W$ 是直和（即 $V\cap W=\{\vec{0}\}$）$\Longleftrightarrow$

$\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k,\vec{w}_1,\cdots,\vec{w}_l$ 是 $V+W$ 的一组基

证明："$\Longrightarrow$" 设 $V\cap W=\{\vec{0}\}$，则维数公式蕴含 $\dim(V+W)$
$=l+k$.

$\because$ $V+W=\{v_i+w_j \mid v_i\in V,\ w_j\in W\}$ 可以由 $v_1,\cdots v_k,\ w_1,\cdots w_k$ 生成，所以这组向量含有 $V+W$ 的一个基底.

$\Downarrow$

$(\dim(V+W)\le k+l)$

又 $\because$ $\dim(V+W)=k+l$.

故 $v_1,\cdots,v_k,\ w_1,\cdots,w_l$ 是 $V+W$ 的基。

"$\Longleftarrow$" 假设 $v_1,\cdots,v_k,\ w_1,\cdots,w_l$ 是 $V+W$ 的一组基

$\dim(V+W)=k+l$.

由维数公式可知 $V\cap W=\{\vec{0}\}$

(ii) $S=\{v_i+w_j \mid i=1,2,\cdots,k,\ j=1,2,\cdots,l\}$ 生成的子空间的维数。

分析：$S=\{v_1+w_1,\ v_1+w_2,\ v_2+w_1,\ v_2+w_2\}$

$v_2+w_2=(v_1+w_2)+(v_2+w_1)-(v_1+w_1)$

猜测 $\dim(\langle S\rangle)=k+l-1$

证：集合 S 中每个向量是集合

$T=\{v_1+w_1,\ v_2+w_1,\cdots,v_k+w_1,\ w_1-w_2,\cdots,w_1-w_l\}$

的线性组合. 这是因为 $v_i+w_j=(v_i+w_1)-(w_1-w_j)$

其中 $i=1,\cdots,k,\ j=1,\cdots,l$. 进而 $T\subset\langle S\rangle$ 故 $\langle S\rangle=\langle T\rangle$.

下证 T 中的向量线性无关.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\ \beta_2,\cdots\beta_l\in\mathbb{R}$ s.t.

$\alpha_1(v_1+w_1)+\alpha_2(v_2+w_1)+\cdots+\alpha_k(v_k+w_1)+\beta_2(w_1-w_2)$
$+\cdots+\beta_l(w_1-w_l)=0$.

则 $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \beta_2 + \cdots + \beta_\ell) w_1$
$- \beta_2 w_2 - \cdots + \beta_\ell w_\ell = 0.$

由(i)可知，$v_1, \cdots v_k, w_1, \cdots, w_\ell$ 线性无关.

故 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_2 = \cdots = \beta_\ell = 0.$

$\because$ T中向量线性无关且 $\langle T \rangle = \langle S \rangle$

$\therefore \dim(\langle S \rangle) = k + \ell - 1.$ $\square$

7. D对角而非对称，元素两两不同但值可能取0.

故 $\mathrm{rank}(D) > n-1.$

证：(i) 由 Sylvester 不等式

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(DA) &\geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(D) - n \\ &\geq \mathrm{rank}(A) + n - 1 - n \\ &= \mathrm{rank}(A) - 1.\end{aligned}$$

(ii). 记 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = D.$ $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 两两不同.

$$DA = \begin{pmatrix} \lambda_1 \vec{A_1} \\ \vdots \\ \lambda_n \vec{A_n} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad AD = (\lambda_1 \vec{A}^{(1)}, \cdots, \lambda_n \vec{A}^{(n)}).$$

设 $A = (a_{ij})$. 则 $DA = AD$ 蕴含 $\lambda_i a_{ij} = \lambda_j a_{ij}$

$(\lambda_i - \lambda_j) a_{ij} = 0$

当 $i \neq j$ 时，$\lambda_i \neq \lambda_j$. 故 $a_{ij} = 0$ 故 A对角矩阵.

8. 证：(i) 设 $x \in \ker(\varphi^k)$

则 $\varphi^k(x) = 0.$

于是 $\varphi^{k+1}(x) = \varphi(\varphi^{(k)}(x)) = \varphi(0) = 0.$

故 $x \in \ker(\varphi^{k+1}).$

$\mathrm{im}(\varphi^i) \supset \mathrm{im}(\varphi^{i+1})$ 可证.

(ii) 假设这样的 l 不存在，则 (i) 中的结论蕴含

$$\ker(\varphi) \subsetneq \ker(\varphi^2) \subsetneq \ker(\varphi^3) \subsetneq \cdots$$

于是 $\dim(\ker(\varphi)) < \dim(\ker(\varphi^2)) < \dim(\ker(\varphi^3)) < \cdots$

这与对任意 $k>0$, $\dim(\ker(\varphi^k)) \le n$ 矛盾.

(iii) 先证：对 $\forall\, m \in \mathbb{Z}^+$

$$\ker(\varphi^l) = \ker(\varphi^{l+m})$$

对 m 归纳.

a. 当 $m=1$ 时，结论成立。

b. 当 $m>1$ 时，假设 $m=k-1$ 时 $\ker(\varphi^l) = \ker(\varphi^{l+k-1})$ 成立.

下证 $m=k$ 时成立，如下：

设 $x \in \ker(\varphi^{l+k})$. 则 $\varphi^{l+k}(x) = 0$.

于是 $\varphi^{l+k-1}(\varphi(x)) = 0$.

故 $\varphi(x) \in \ker(\varphi^{l+k-1})$

由归纳假设可知 $\varphi(x) \in \ker(\varphi^l)$

（即 $\varphi^l(\varphi(x)) = \varphi^{l+1}(x) = 0$）.

故 $x \in \ker(\varphi^{l+1}) \Longrightarrow x \in \ker(\varphi^l)$

$\therefore \ker(\varphi^{l+k}) \subset \ker(\varphi^l)$

再由 (i) $\ker(\varphi^l) \subset \ker(\varphi^{l+k})$

综合 a. b 对 $\forall\, m \in \mathbb{Z}^+$ 都成立。

由对偶定理可知. 对任意 $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\dim(\ker(\varphi^k)) + \dim(\operatorname{im}(\varphi^k)) = n.$$

再由 $\ker(\varphi^l) = \ker(\varphi^{l+m})$

可知 $\dim(\operatorname{im}(\varphi^l)) = \dim(\operatorname{im}(\varphi^{l+m}))$.

设 $y\in im(\varphi^{l+m})$. 则 $\exists\, x\in\mathbb{R}^n$ s.t. $y=\varphi^{l+m}(x)$.

故 $y=\varphi^{l}(\varphi^{m}(x))$ 故 $y\in im(\varphi^{l})$.

即 $im(\varphi^{l+m})\subset im(\varphi^{l})$

由维数公式 $im(\varphi^{l+m})=im(\varphi^{l})$. □

eg.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{R}^5 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^5 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^5 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^5 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^5 \\
\vec{e}_1 & \longmapsto & \vec{e}_1 & \longmapsto & \vec{e}_1 & \longmapsto & \vec{e}_1 & \longmapsto & \vec{e}_1 \\
\vec{e}_2 & \longmapsto & \vec{e}_2 & \longmapsto & \vec{e}_2 & \longmapsto & \vec{e}_2 & \longmapsto & \vec{e}_2 \\
\vec{e}_3 & \longmapsto & \vec{0} & \longmapsto & \vec{0} & \longmapsto & \vec{0} & \longmapsto & \vec{0} \\
\vec{e}_4 & \longmapsto & \vec{e}_3 & \longmapsto & \vec{0} & \longmapsto & \vec{0} & \longmapsto & \vec{0} \\
\vec{e}_5 & \longmapsto & \vec{e}_4 & \longmapsto & \vec{e}_3 & \longmapsto & \vec{0} & \longmapsto & \vec{0} \\
 & & \vec{e}_5 & \longmapsto & \vec{e}_4 & \longmapsto & \vec{e}_4 & \longmapsto & \vec{0} \\
 & & & & \vec{e}_5 & \longmapsto & \vec{e}_4 & \longmapsto & \vec{e}_3 \\
 & & & & & & \vec{e}_5 & \longmapsto & \vec{e}_4
\end{array}
$$

$ker(\varphi)=\langle\vec{e}_3\rangle$ $\quad$ $ker(\varphi^2)=\langle\vec{e}_3,\vec{e}_4\rangle$

$ker(\varphi^3)=\langle\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5\rangle$ $\quad$ $ker(\varphi^4)=\langle\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5\rangle$

$im(\varphi)=\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\rangle$ $\quad$ $im(\varphi^2)=\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\rangle$

$im(\varphi^3)=\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle$ $\quad$ $im(\varphi)=\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle$

注: $(f^2)^{-1}=(f\circ f)^{-1}=(f^{-1})\circ(f^{-1})=(f^{-1})^2$

不可以写成 f^{-2}

二. 作业题及其问题

1. a. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

b. $(A^{-1})^{-1}=A$

c. $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

d. 可逆、幂等、幂零的例子可当结论来记

hw1. A^{-1} 对称，由定义即证 $(A^{-1})^t=A^{-1}$.

2. 求逆 a. $(A\mid E)\longrightarrow\cdots\longrightarrow(E\mid A^{-1})$

b. $a_kA^k+\cdots+a_1A+a_0E=O$.

故 $A^{-1}=-a_0^{-1}(a_1E+\cdots+a_kA^{k-1})$.

hw5. 用方法a.

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right)$$

将所有行加到第一行，第一行乘 S^{-1}，其中 $S=\frac{1}{2}n(n+1)$.

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1/S & 1/S & 1/S & \cdots & 1/S & 1/S\\
n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right)$$

第二行起依次减去下一行，$(F_{2,3}(-1),\ F_{3,4}(-1),\cdots F_{n-1,n}(-1))$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_{2,1}(-1)$, $F_{3,1}(-1)$ $\cdots$ $F_{n,1}(-1)$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{s} & \frac{s-1}{s} & -\frac{s+1}{s} & \cdots & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} & \frac{s-1}{s} & \cdots & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & -\frac{s-2}{s} \end{array}\right)$$

$F_2(-\frac{1}{n})$, $F_3(-\frac{1}{n})$, $\cdots$ $F_{n-1}(-\frac{1}{n})$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & -\frac{s-2}{s} \end{array}\right)$$

$F_{1,2}(-1)$, $F_{1,3}(-1)$, $F_{1,4}(-1)$, $\cdots$ $F_{1,n-1}(-1)$.

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{2}{ns} & \frac{s+2}{ns} & \frac{2}{ns} & \cdots & \frac{2}{ns} & \frac{2-s}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & -\frac{s-2}{s} \end{array}\right)$$

$F_{n,2}(-1)$, $F_{n,3}(-2)$, $\cdots$ $F_{n,n-1}(n-2)$, $F_{1,n}(-1)$, $F_n(-1)$.

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{s+1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ns}\begin{pmatrix} 1-s & 1+s & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-s & 1+s & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-s & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1+s & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-s \end{pmatrix}$$

$\square$

hw 2. (1) $A^0 = E_n$, $A^1 = A$, $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4A^0$

找到最小的整数 $k=2$.

$$A^2 - 4E = 0$$

$$A^{-1} = A/4$$

$\square$

3. 矩阵分块

a. 分块后计算还满足矩阵乘法公式

b. 矩阵秩的不等式

c. 矩阵方程求解

第四题刚好可以用对应的三种方法来做.

hw4.1) 注意到 $A(E_n+BA)=(E_n+AB)A$,

因此 $B(E_n+AB)^{-1}A(E_n+BA)=BA$.

故 $E_n=E_n+BA-BA$

$$=(E_n+BA)-B(E_n+AB)^{-1}A(E_n+BA)$$
$$=[E_n-B(E_n+AB)^{-1}A](E_n+BA).$$

$\therefore\ (E_n+BA)^{-1}=E_n-B(E_n+AB)^{-1}A.$ $\square$

2) Sylvester 等式:

$$\text{rank}(E_n+AB)+n=\text{rank}(E_n+BA)+n$$

及其相关过程, 主要是说明 E_n+BA 满秩。

$$N:=\begin{pmatrix}E_n & A\\ O & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n+AB & O\\ O & E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n+AB & A\\ O & E_n\end{pmatrix}$$

$$P:=\begin{pmatrix}E_n+AB & A\\ O & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & O\\ -B & E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n & A\\ -B & E_n\end{pmatrix}$$

$$Q:=\begin{pmatrix}E_n & O\\ B & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & A\\ -B & E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n & A\\ O & E_n+BA\end{pmatrix}$$

$$R:=\begin{pmatrix}E_n & A\\ O & E_n+BA\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & -A\\ O & E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n & O\\ O & E_n+BA\end{pmatrix}$$

$\text{rank}(E_n+BA)=n$ 满秩 $\Longleftrightarrow$ 可逆

3) 若 E_n+BA 不可逆

则方程组 $(E_n+BA)\vec{x}=\vec{0}$ 有非零解 $\vec{v}$.

即 $(E_n+BA)\vec{v}=\vec{0}$ 且 $\vec{v}\neq\vec{0}$

$BA\vec{v}=-\vec{v}$

$(E_n+AB)(A\vec{v})=A\vec{v}+A(BA\vec{v})=\vec{0}$

$A\vec{v}\neq\vec{0}$ 否则 $-\vec{v}=B(A\vec{v})=B\cdot\vec{0}=\vec{0}$ 与 $\vec{v}\neq\vec{0}$ 矛盾.

$\therefore$ $A\vec{v}$ 是 $(E_n+AB)\vec{x}=\vec{0}$ 的非零解.

$\therefore$ $|E_n+AB|=0$

与 E_n+AB 可逆矛盾。