1、若 $A=(a_{ij})$ 为可逆对称方阵，证明：A^{-1} 也为对称方阵.

解: $A\cdot A^{-1}=E$

$$(A\cdot A^{-1})^t=(A^{-1})^t\cdot A^t=E^t=E$$

$$A^t=A,\Rightarrow (A^{-1})^t\cdot A=E$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^t=A^{t}.\quad (\text{逆唯一})$$

2、求下面矩阵的逆：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&&\\&1&\ddots&\\&&\ddots&-1\\&&&1\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

(1) M-1: $(A\vdots E)\longrightarrow(E\vdots A^{-1})$

M-2: 记A的列向量为 $A^{(1)}\cdots A^{(4)}$

观察到 $(A^{(i)})^t\cdot A^{(j)}=\delta^{ij}\cdot 4\qquad \delta^{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

$$\Rightarrow A^t\cdot A=4\cdot E\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}A^t$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

(2) 记 $C=\begin{pmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}\quad B=(E-C)\qquad C^n=0$

$$(E-C)(E+C+C^2+\cdots+C^{n-1})=E-C^n=E$$

$$\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\&\ddots&\ddots&\vdots\\&&\ddots&1\\0&&&1\end{pmatrix}$$

3、设

$$X = \begin{pmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

其中 A,C 为可逆方阵. 设已知 A^{-1}, C^{-1}, 求 X^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^{-1} = \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

4、设 A, B 是 n 阶方阵, $E_n + AB$ 可逆, 求证: $E_n + BA$ 也可逆.

Pf: M1: $A(E_n + BA) = (E_n + AB)A$

$$\Rightarrow (E_n + AB)^{-1} \cdot A \cdot (E_n + AB) = A$$

$$\Rightarrow B \cdot (E_n + AB)^{-1} \cdot A \cdot (E_n + AB) = B \cdot A.$$

$$\Rightarrow E_n = E_n + BA - BA$$

$$= E_n + BA - B(E_n + AB)^{-1} \cdot A \cdot (E + AB)$$

$$= \left(E_n - B(E_n + AB)^{-1}\right)(E + BA).$$

M2: $\mathrm{rank}(E_n + AB) + n = \mathrm{rank}(E_n + BA) + n$ (Sylvester 等式)

$$\Rightarrow n = \mathrm{rank}(E_n + AB) = \mathrm{rank}(E_n + BA)$$

$\Rightarrow E_n + BA$ 满秩.

5、 求下面矩阵的逆:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

解 对 $(A \vdots I_n)$ 用初等变换法, 将所有行加到第一行上, 第一行乘以 s^{-1}, 其中 $s=\dfrac{1}{2}n(n+1)$.

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

第二行起依次减去下一行, 得到

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

消去第一列除第一行外的所有元素后, 得

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{s} & \frac{s-1}{s} & -\frac{s+1}{s} & \cdots & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} & \frac{s-1}{s} & \cdots & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & -\frac{s-2}{s} \end{array}\right).$$

从第二行到第 $n-1$ 行乘以 $-\dfrac{1}{n}$ 得到

$$\left(\begin{array}{cccccc:cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & -\frac{s-2}{s} \end{array}\right).$$

第一行依次减去第二行, 第三行, $\cdots$, 第 $n-1$ 行, 得到

$$\left(\begin{array}{cccccc:cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{2}{ns} & \frac{s+2}{ns} & \frac{2}{ns} & \cdots & \frac{2}{ns} & \frac{2-s}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & -\frac{s-2}{s} \end{array}\right).$$

第二行乘 -1 加到最后一行, 第三行乘以 -2 加到最后一行, $\cdots$, 第 $n-1$ 行乘以 $n-2$ 加到最后一行, 得到

$$\left(\begin{array}{cccccc:cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{2}{ns} & \frac{s+2}{ns} & \frac{2}{ns} & \cdots & \frac{2}{ns} & \frac{2-s}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -\frac{s+1}{ns} & -\frac{1}{ns} & -\frac{1}{ns} & \cdots & -\frac{1}{ns} & \frac{s-1}{ns} \end{array}\right).$$

最后一行加到第一行, 再将 -1 乘以最后一行, 得到

$$\left(\begin{array}{cccccc:cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{s+1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} \end{array}\right).$$

因此

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ns}\begin{pmatrix} 1-s & 1+s & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-s & 1+s & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-s & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1+s & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-s \end{pmatrix}. \square$$

2. (15分) 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的标准基, $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基, $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ 是线性映射且满足

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{e}_1) = \boldsymbol{\epsilon}_1 + 4\boldsymbol{\epsilon}_2 + 2\boldsymbol{\epsilon}_3 \\ \phi(\mathbf{e}_2) = 3\boldsymbol{\epsilon}_2 + 3\boldsymbol{\epsilon}_3 \\ \phi(\mathbf{e}_3) = \boldsymbol{\epsilon}_1 + 3\boldsymbol{\epsilon}_2 + \boldsymbol{\epsilon}_3 \\ \phi(\mathbf{e}_4) = \boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_2 - \boldsymbol{\epsilon}_3 \end{cases}$$

计算:

(i) ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$; $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3$ 下的矩阵;

(ii) $\ker(\phi)$ 和 $\mathrm{im}(\phi)$ 的维数;

(iii) $\ker(\phi)$ 的一组基和 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基.

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(ii) $A \cdot X = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{rank} A = 2$. $\dim \ker \varphi = 4 - 2 = 2$.

(iii) $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker \varphi$, $\ker \varphi = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathrm{Im} \varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

常见错误 ①矩阵写错, ②不会写像集.

注意事项: 求Ker一组基.

4. (15分) 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间. 对 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in \mathbb{R}^n$, 如果 $\mathbf{x}-\mathbf{y}\in U$, 则称 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 关于 U 等价, 记为 $\mathbf{x}\sim_U \mathbf{y}$.

(i) 验证: $\sim_U$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的等价关系.

(ii) 证明: $\mathbf{x}$ 关于 $\sim_U$ 的等价类等于 $\mathbf{x}+U$, 即集合 $\{\mathbf{x}+\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}\in U\}$.

(i) ① $\forall x\in U \quad x-x=0\in U \Rightarrow x\sim_U x$.

② $x\sim_U y \Rightarrow x-y\in U \Rightarrow y-x\in U \Rightarrow y\sim_U x$.

③ $x\sim_U y,\ y\sim_U z \Rightarrow x-y\in U,\ y-z\in U$

$\Rightarrow x-z=(x-y)+(y-z)\in U.$

$\Rightarrow x\sim_U z.$

(ii) $[x]=\{y\in U \mid y-x\in U\}$ " $[x]=x+U$ "

"$\subseteq$" $\forall y\in[x],\ y=x+u_y,\ u_y\in U.$

$\Rightarrow y\in x+U$

"$\supseteq$" $\forall y\in x+U,\ y=x+u_y',$ 对于某 $u_y'\in U$

$\Rightarrow y-x=u_y'\in U = y\sim_U x$

$\Rightarrow y\in[x].$ $\square$

Rem: $\mathbb{R}^n/\sim$ 可以赋予线性空间结构,

$\begin{cases}[x]+[y]=[x+y]\\ k\cdot[x]=[kx]\end{cases}$

$\dim \mathbb{R}^n/\sim = n-\dim U.$

5. (10分) 设 $m, n \in \mathbb{Z}^+$ 且 $\gcd(m, n) = 1$. 证明:

(i) 对任意 $k \in \mathbb{Z}$, 以 x, y 为未知数的方程 $mx + ny = k$ 有整数解;

(ii) 设

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, ma + nb = 0 \right\}.$$

判断 S 是不是 $\mathbb{R}^2$ 中的子空间, 并说明理由.

(i) $(m,n)=1 \Rightarrow \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ s.t.

$\lambda m + \mu n = 1$

$\Rightarrow k\lambda m + k\mu n = k$

$\Rightarrow x = k\lambda,\ y = k\mu$ 为~~此~~方程整数解.

(ii) 不是: 取 $\begin{pmatrix} -n \\ m \end{pmatrix} \in S$, $\Rightarrow S \neq 0$

S 关于 $\mathbb{R}$ 数乘不封闭, 故不为子空间.

6. (10分) 设 $V, W \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间, 它们的基底分别是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 和 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_\ell$.

(i) 证明: $V + W$ 是直和(即 $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$) 当且仅当 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_\ell$ 是 $V + W$ 的一组基.

(ii) 设 $V + W$ 是直和. 计算由集合 $S = \{\mathbf{v}_i + \mathbf{w}_j \mid i = 1, 2, \ldots, k, j = 1, 2, \ldots, \ell\}$ 生成的子空间 $\langle S \rangle$ 的维数.

(i) "$\Rightarrow$" $V \cap W = \{0\}$, 若 $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_\ell w_\ell = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0 \\ \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_\ell w_\ell = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0,\ \mu_1 = \cdots = \mu_\ell = 0.$

$\Rightarrow$ 线性无关.

"$\Leftarrow$" $\forall\ u \in V \cap W \Rightarrow u = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = b_1 w_1 + \cdots + b_\ell w_\ell$

$\Rightarrow a_1 = \cdots = a_k = b_1 = \cdots = b_\ell = 0.$

$\Rightarrow u = 0$

(ii) 令 $u_2 = v_2 - v_1, \ldots, u_k = v_k - v_1$, $z_2 = w_2 - w_1, \ldots, z_\ell = w_\ell - w_1$

则 $T = \{v_1 + w_1, u_2, \ldots, u_k, z_2, \ldots, z_k\} \subset \langle S \rangle$.

则 S 可由 T 生成, T 中元素线性无关, $\Rightarrow \dim \langle S \rangle = k + \ell - 1$.

M2 设 $\sum_{i,j} x_{ij}(v_i+w_j)=0$

$$\Rightarrow \Big(\sum_{j=1}^{l} x_{1j}\Big)v_1+\cdots+\Big(\sum_{j=1}^{l} x_{kj}\Big)v_k+\Big(\sum_{i=1}^{k} x_{i1}\Big)w_1+\cdots+\Big(\sum_{i=1}^{k} x_{il}\Big)w_l=0$$

$\Rightarrow$ $\sum_{j=1}^{l} x_{ij}=0$，$\sum_{i=1}^{k} x_{ij}=0$，考虑 x_{ij} 组成的线性方程组

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1l} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2l} & \cdots & x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kl} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & & 0 \\
0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & \cdots & 1 & 1 & & 1 \\
\hline
1 & 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 & & 1 & 0 & & 0 \\
0 & 1 & & 0 & 0 & 1 & & 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 \\
0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & & 1 & & 0 & 0 & & 1
\end{array}\right)$$

$\dim\langle S\rangle = k\cdot l -$ 解空间维数 $= k+l-1$

7. (10分) 设 $A, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 其中 D 是对角矩阵且对角线上的元素两两不同. 证明:

(i) $\operatorname{rank}(DA) \geq \operatorname{rank}(A)-1$;

(ii) 如果 $DA = AD$, 则 A 也是对角矩阵.

Rem：对角矩阵不是对称矩阵.

8. (15分) 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是线性映射. 证明:

(i) 对任意 $k \in \mathbb{Z}^+$, $\ker(\phi^k) \subset \ker(\phi^{k+1})$;

(ii) 存在 $\ell \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $\ker(\phi^\ell) = \ker(\phi^{\ell+1})$;

(iii) 如果 $\ker(\phi^\ell) = \ker(\phi^{\ell+1})$, 则对任意的 $m \in \mathbb{Z}^+$,

$$\ker(\phi^\ell) = \ker(\phi^{\ell+m}) \quad \text{且} \quad \mathrm{im}(\phi^\ell) = \mathrm{im}(\phi^{\ell+m}).$$

(i) $v \in \mathbb{R}^n$ $\phi^k(v) = 0 \Rightarrow \Phi^{k+1}(v) = \Phi(\Phi^k(v)) = 0. \Rightarrow \ker \Phi^k \subset \ker(\Phi^{k+1})$.

(ii) 记 $d_i = \dim(\ker \Phi^i)$, 由(i) $d_0 \le d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_k \le \cdots$

$d_i \le n \Rightarrow \exists \ell$ s.t. $d_\ell = d_{\ell+1} \Rightarrow \ker \Phi^\ell = \ker \Phi^{\ell+1}$.

(iii) $\ker(\Phi^\ell) = \ker(\Phi^{\ell+1})$, $\ker \Phi^{\ell+1} \subset \ker \Phi^{\ell+2}$, $\forall v \in \ker \Phi^{\ell+2}$, $\Phi^{\ell+2}(v) = \Phi^{\ell+1}(\Phi(v)) = 0$

$\Rightarrow \Phi(v) \in \ker \Phi^{\ell+1} \Rightarrow \Phi^\ell(\Phi(v)) = \Phi^{\ell+1}(v) = 0 \Rightarrow v \in \ker \Phi^{\ell+1}$

i.e. $\ker \Phi^{\ell+2} \subset \ker \Phi^{\ell+1}$.

$\dim \ker \Phi^\ell + \dim \mathrm{im}\, \Phi^\ell = n = \dim \ker \Phi^{\ell+m} + \dim \mathrm{im}\, \Phi^{\ell+m}$ $m \ge 0$

$\Rightarrow \dim \mathrm{im}\, \Phi^\ell = \dim \mathrm{im}\, \Phi^{\ell+m}$

$\mathrm{im}\, \Phi^{\ell+m} \subset \mathrm{im}\, \Phi^\ell \Rightarrow \mathrm{im}\, \Phi^{\ell+m} = \mathrm{im}\, \Phi^\ell$, $m \ge 0$. ∎