第八次习题课

一、作业中的问题及解答

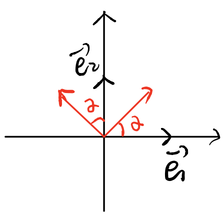
1. 计算

由于是n次，注意写过程时用数学归纳法。

第(3)小问与上次习题课中的用搬运工原理计算矩阵乘法是相一致的。

第(2)小问则是旋转映射 R_θ.

$$A = R_\theta(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} R_\theta(\vec{e_1}) = \cos\alpha\,\vec{e_1} + \sin\alpha\,\vec{e_2} \\ R_\theta(\vec{e_2}) = -\sin\alpha\,\vec{e_1} + \cos\alpha\,\vec{e_2} \end{cases}$$



$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ 逆时针旋转 α.

$$R_\theta^k: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{x} \mapsto A^k\vec{x}$$

$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ 逆时针旋转 $k\alpha$ 角。

2. 证明：说明一般证对称矩阵即只验证 $A^t = A$.

此题 $(AB)^t = B^tA^t$

"$\Longrightarrow$" ∵ AB 为对称矩阵

∴ $(AB)^t = AB$ 即 $B^tA^t = AB$ 此结论证明如下.

∵ $A^t = A$, $B^t = B$

∴ $AB = BA$

"$\Longleftarrow$" ∵ $AB = BA$

而 $A^t = A$, $B^t = B$.

∴ $AB = B^tA^t = (AB)^t$

∴ AB 为对称矩阵.

$A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$

$A\cdot B = (C_{ij})_{n\times n} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

$A^t=(a'_{ij})_{n\times n}$ $B^t=(b'_{ij})_{n\times n}$ $(AB)^t=(C'_{ij})_{n\times n}$

$a'_{ij}=a_{ji}$, $b'_{ij}=b_{ji}$ $C'_{ij}=C_{ji}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$

$$C'_{ij}=\sum_{i=1}^{n}b'_{ik}a'_{kj} \Longrightarrow (AB)^t=B^t\cdot A^t$$

AB对称 $\Longleftrightarrow B\cdot A=B^tA^t=(AB)^t=AB$ □.

3. 证明: $\text{rank}(A)+\text{rank}(B)-n\leq \text{rank}(AB)$

$\text{rank}(AB)+\text{rank}(C)-n\leq \text{rank}(ABC)$

$\text{rank}(A)+\text{rank}(B)\leq 2n+\text{rank}(ABC)-\text{rank}(C)$

$\because$ $ABC=0 \Rightarrow \text{rank}(ABC)=0$

$\therefore$ $\text{rank}(A)+\text{rank}(B)+\text{rank}(C)\leq 2n$

若 $A=B=E_n$, $C=0$ 则等号成立. □

4. 证: (i) $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 则

$A\cdot B=(C_{ij})_{n\times n}$ $C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

$B\cdot A=(d_{ij})_{n\times n}$ $d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}$

$\text{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}C_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$

$\text{tr}(BA)=\sum_{i=1}^{n}d_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki}$

$\Longrightarrow$ $\text{tr}(AB)=\text{tr}(BA)$.

(ii) $A=(a_{ij})_{n\times n}$ $A^t=(a'_{ij})_{n\times n}$ $a'_{ij}=a_{ji}$.

$\text{tr}(AA^t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a'_{ki}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2\geqslant 0$

$\text{tr}(AA^t)=0 \Longleftrightarrow a_{ik}=0\ \forall i,k \Longleftrightarrow A=0$.

(iii) $(A+B)^t = A^t + B^t$

由(ii) $tr(AA^t) \geq 0$ 启发，可设 $C = AB - BA$.

$C^t = (AB-BA)^t = B^tA^t - A^tB^t = BA - AB$

$C \cdot C^t = (AB-BA)(BA-AB)$

$= ABBA - AB\cdot AB - BA\cdot BA + BAAB$

$tr(CC^t) = tr(ABBA - (AB)^2 - (BA)^2 + BAAB)$

$= tr(A^2B^2) - tr((AB)^2) - tr((BA)^2) + tr(B^2A^2)$

$= 2\,tr(A^2B^2) - 2\,tr((AB)^2)$

≥ 0

故 $tr(A^2B^2) \geq tr((AB)^2)$

5. 证: (i) ①

$$A = \begin{pmatrix} \vec{A_1} \\ \vec{A_2} \\ \vdots \\ \vec{A_r} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

下面$(m-r)$行为 $\vec{A_1}, \cdots, \vec{A_r}$ 的线性组合.

$\alpha_{i1}\vec{A_1} + \alpha_{i2}\vec{A_2} + \cdots + \alpha_{ir}\vec{A_r} \quad i = r+1, \cdots, m$

故 $$A = \begin{pmatrix} \vec{A_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{A_2} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vec{A_r} \end{pmatrix}$$

下面$(m-r)$为 $\vec{A_1}$的共线向量　　$\vec{A_2}$共线向量　　$\vec{A_r}$共线向量.

$\alpha_{i1}\vec{A_1}$　　$\alpha_{i2}\vec{A_2}$　　$\alpha_{r}\vec{A_r}$　　$(i = r+1, \cdots, m)$

② $A = C_1 + \cdots + C_s$ $\quad \operatorname{rank}(C_i)=1$，$s < r$.

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(C_1 + \cdots + C_s)$

$\leq \operatorname{rank}(C_1) + \cdots + \operatorname{rank}(C_s) = s$ 矛盾.

(ii) 若 $\operatorname{rank}(A)=1$

则可看成 $V_r(A) = \langle \vec{A_1} \rangle$

故 $A = \begin{pmatrix} \vec{A_1} \\ a_2 \vec{A_1} \\ \vdots \\ a_m \vec{A_1} \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ $\quad D = \vec{A_1}$

$$A = CD$$

□

期中复习

1. 代数起源于解方程

1.1 线性方程(组)

1. 系数矩阵与增广矩阵的定义

2. 不相容;相容(确定;不确定).

1.2 高次方程组

2. 线性方程组初步

1. L 与 L' 等价的定义

2.1 矩阵的初等行变换

2.2 阶梯型矩阵

1. 任何一个矩阵通过有限次初等I.II类行变换化为一个阶梯型矩阵。

2.3 高斯消去法

1. (i) L 相容 $\Longleftrightarrow c_{k+1}=\cdots=c_m=0$;

(ii) L 确定 $\Longleftrightarrow c_{k+1}=\cdots=c_m=0$ 且 $k=n$

会判断相容性与确定性.

2.4 齐次线性方程组

方程的个数小于未知元的个数时,一定有非平凡解,

行列式 $\neq 0$,只有零解;行列式 $=0$,有非平凡解。

2.5 低(二)阶行列式

解的表示形式(二阶或者三阶)

3. 集合

1. (i) $U_\lambda \subset S$, $\quad \bigcup U_\lambda \subset S$

(ii) $S \subset U_\lambda$, $\quad S \subset \bigcap U_\lambda$

2. (i) $T \cap (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(T\cap S_\lambda)$;

(ii) $T \cup (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(T\cup S_\lambda)$.

3. 有限集与无限集. $|S|$ or $\mathrm{card}(S)$.

4. 集合论的语言刻画方程的解.

4. 映射

4.1 定义、例子和类型

1. 定义 id_S(恒同映射); $id_{S'}$(嵌入映射); P_1(投影映射)

2. 单射、满射、双射.

4.2 像集和原像集

像集、原像集、纤维

4.3 映射的复合

4.4 映射的逆

1. 逆映射 (若可逆, 则逆映射唯一).

2. 穿衣脱衣规则 $\Longleftrightarrow$ f 为双射.

4.5 集合的势

1. 若$\exists$双射 $f: S \longrightarrow T$ $\quad \mathrm{card}(S) = \mathrm{card}(T)$.

2. $\mathcal{P}(S)$. 所有S的子集构成的集合, 则S与$\mathcal{P}(S)$不等势。

5. 等价关系和序关系

5.1 二元关系

1. 定义

5.2 等价关系

1. 自反性, 对称性, 传递性

2. $m|(x-y)$, $x \equiv_m y$ $\quad (x \equiv y \bmod m)$

(验证等价关系)

5.3 等价类和商集

$$\bar{x}=\{y\in S \mid x\sim y\}.$$

1. (i) $x\sim y \Longleftrightarrow \bar{x}\sim\bar{y}$.

(ii) $x\nsim y \Longleftrightarrow \bar{x}\cap\bar{y}=\phi$.

2. $\pi: S\longrightarrow S/\pi$

$x\longmapsto\bar{x}$

商映射或自然投射。

5.4 集合的划分

1. 定义

5.5 映射分解定理

1. $f: S\to T$是映射，如果$f(x)=f(y)$，则$x\sim_f y$.

称$\sim_f$是f诱导的等价关系。

2.
$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & T \\ & (S/\sim_f) \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

5.6 序关系

1. 自反，反对称，传递性.

2. 最大元、最小元.

6. 置换

6.1 置换的定义和表法

$$\mathrm{card}(S_n)=n!$$

1. 注意计算 $\sigma\tau$，$\tau\sigma$时的先后顺序

2. 计算置换的阶：a. $\sigma^k=e$ b. $\sigma^m=e\Rightarrow k\mid m$

c. 最小公倍式

6.2 循环分解

1. 阶为循环长度

2. 互不相交的置换可交换

6.3 偶置换和奇置换

1. 任何一个循环都是若干个对换之积

2. 奇置换, 偶置换的定义, 符号. $\varepsilon_{\sigma\tau}=\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau$

7. 整数的算数

7.1 最大公因子和最小公倍数

1. 基本性质: $d|m$ 且 $d|n$, 则 $d|(um+vn)$.

2. 如果 $\gcd(m,n)=1$, 则称 m 和 n 互素。

m,n 互素 $\Longleftrightarrow \exists u,v\in\mathbb{Z}$ s.t. $um+vn=1$.

3. $$\mathrm{lcm}(m,n)=\frac{mn}{\gcd(m,n)}$$

4. 辗转相除.

7.2 素数

1. 定义

2. 设 p 是素数, $a,b\in\mathbb{Z}$, 若 $p|(ab)$, 则 $p|a$ 或 $p|b$.

3. 设 p 是素数, k 是小于 p 的正整数. 证明:

$$p\,\Big|\,\binom{p}{k}$$

第二章 矩阵

1. 线性相关性

1.1 坐标空间的定义

1.2 线性组合, 线性相关和线性无关

1. 判断是否可以线性表出 (增广矩阵? 相容)

2. 判断线性相关性　　(系数矩阵？平凡解)

3. 部分？整体

1.3 坐标空间中的子空间

1. $a\vec{x}+b\vec{y} \ ? \in U$

eg. $\ker(\varphi)$, $\mathrm{im}(\varphi)$, $\mathrm{sol}(H)$, $\langle S\rangle$.

2. 子空间的交与和都是子空间

3. 线性流形的定义

线性流形是子空间 $\Longleftrightarrow$ 含有零向量

4. $\langle S\rangle$　　若 $S\subset U \Rightarrow \langle S\rangle \subset U$.

eg. $U+W=\langle U\cup W\rangle$.

5. 直和.

2. 子空间的基底和维数

2.1 极大线性无关组

2.2 子空间的基底

1. 基的定义

2. 基扩充定理

2.3 维数

1. 基的个数称之为维数

2. $U\subset W \Rightarrow \dim(U)\le \dim(W)$.

3. $\dim(U+W)+\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)$.

直和: $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)$.

3. 矩阵的秩

3.1 初等行变换下的不变量

1. 行空间、列空间、行秩、列秩

3.2 矩阵的秩

1. 行秩 = 列秩

2. $rank(A) \le min(m, n)$ 　　行,列空间

3. $rank((A, B)) \le rank(A) + rank(B)$.

3.3 矩阵的转置

4. 线性方程组和矩阵的秩

4.1 定性部分

1. (i) L相容 $\Longleftrightarrow$ $rank(A) = rank(B)$.

(ii) L确定 $\Longleftrightarrow$ $rank(A) = rank(B) = n$.

2. H有非平凡解 $\Longleftrightarrow$ $rank(A) < n$.

3. H确定 $\Longleftrightarrow$ L确定

4.2. 定量部分

1. 对偶定理, 方程组版

$$dim(sol(H)) + rank(A) = n.$$

2. 注意 $sol(H)$ 与 $sol(L)$ 的求解与表达。

5. 坐标空间之间的线性映射

5.1 定义和(与基底无关的)性质

1. $\phi(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\phi(\vec{x}) + \beta\phi(\vec{y})$

2. 恒同映射, 零映射, 数乘映射

3. $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 线性映射: 保相关性

$\phi(U)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 子空间, $im(\phi)$

$\phi^{-1}(W)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 子空间, $\phi^{-1}(\{\vec{0}_m\})$.

ϕ 单 $\Longleftrightarrow$ $ker(\phi) = \{\vec{0}_n\}$

5.2 与基底和维数有关的性质

$$\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_j \vec{v_j} \longmapsto \sum_{j=1}^{n} a_j \vec{w_j},\quad a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$$

1. $\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = n$.

2. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ϕ单 $\Leftrightarrow$ ϕ满

3. $\dim(U) \geq \dim(\phi(U))$.
ϕ满: $\dim(\phi^{-1}(W)) \geq \dim(W)$.
} 可当作结论来用.

6. 矩阵的运算

6.1 线性映射在标准基下的矩阵表示

$$\phi(\vec{e_j}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{\varepsilon_i}$$

$$A = (\phi(\vec{e_1}), \cdots, \phi(\vec{e_n})) = (a_{ij})_{m\times n}$$

$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$\Phi: \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$$
$$\phi \longmapsto A_\phi.$$

$$\Psi: \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$
$$A \longmapsto \phi_A$$

$$\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m\times n}} \qquad \Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}.$$

a. $\mathrm{im}(\phi) = V_c(A)$, $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = \mathrm{rank}(A)$.
ϕ满射 $\Longleftrightarrow$ A行满秩.

b. $\dim(\ker(\phi)) = n - \mathrm{rank}(A)$ ϕ单射 $\Longleftrightarrow$ A列满秩

c. ϕ双射 $\Leftrightarrow$ $m=n$ A满秩

6.2 线性映射的运算

映射的加法与数乘

6.3 矩阵的线性运算

推论: $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{\varphi \mid \varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\}$.

$$\Phi: \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$$
$$\varphi \longmapsto A_\varphi$$

$$\Psi: \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$
$$A \longmapsto \varphi_A$$

$$\Phi(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\Phi(\varphi) + \mu\Phi(\psi)$$

$$\Psi(\lambda A + \mu B) = \lambda\Psi(A) + \mu\Psi(B)$$

6.4 矩阵的乘法

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi\circ\psi"'] & \mathbb{R}^s \arrow[d, "\varphi"] \\
 & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

1. 矩阵的乘法不满足交换律，满足结合律
2. $(AB)^t = B^t A^t$
3. $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(BA) = \mathrm{rank}(AC)$

   $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，B是m阶满秩，C是n阶满秩.

7.1 $M_n(\mathbb{R})$上的运算

$A^t = A$： A为对称矩阵

$A^t = -A$： A为斜对称矩阵

$A^2 = A$： A为幂等矩阵

$A^k = 0$： A为幂零矩阵

7.2. 交换不变量与中心元

$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

中心元：数乘矩阵

搬运工引理