1. 设 $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射并且是双射,φ^{-1} 是 φ 的逆映射, 证明以下结论:

   (1) φ^{-1} 是线性映射;

   (2) $n = m$.

证明保持加法和数乘.

Pf: (1) $\forall\ v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$, $\exists\ w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ s.t.

$\varphi(w_1)=v_1 \quad \varphi(w_2)=v_2.$ $\quad \forall\ k,l \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \varphi(kw_1+lw_2) = k\varphi(w_1)+l\varphi(w_2) = kv_1+lv_2$

φ 双射 $\Rightarrow \varphi^{-1}(kv_1+lw_2) = kw_1+lw_2$

$= k\varphi^{-1}(w_1)+l\varphi^{-1}(w_2)$

$\Rightarrow \varphi^{-1}$ 为线性映射.

(2) φ 单 $\Rightarrow$ $n = \dim(\mathrm{im}\varphi) + \dim(\ker\varphi)$

$\Rightarrow n = \dim(\mathrm{im}\varphi) \le m$

φ^{-1} 单 $\Rightarrow$ $m \le n$ $\Rightarrow$ $m=n$. $\square$

2. 设 $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是线性映射, 并且满足对任意的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi(\mathbf{x}) \in \langle \mathbf{x} \rangle$. 证明: 存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得对任意的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$.

Pf: 设 $\varphi(e_i)=\lambda_i e_i \quad i=1,\cdots,n.$

$\varphi(e_1+\cdots+e_n) = \varphi(e_1)+\cdots+\varphi(e_n) = \lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n$

由题 $\exists \lambda$ s.t. $\varphi(e_1+\cdots+e_n) = \lambda(e_1+\cdots e_n)$

$\Rightarrow (\lambda-\lambda_1)e_1+\cdots+(\lambda-\lambda_n)e_n=0 \Rightarrow \lambda=\lambda_1=\cdots=\lambda_n$

$\forall\ x=\sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i\varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i\cdot\lambda e_i = \lambda\cdot x.$ $\square$

Rem: $\varphi(x)\in\langle x\rangle \Rightarrow \varphi(x)=\lambda x$, λ 与 x 有关, 本题要求对 $\forall x$ 成立.
若证明了对 $\forall\ x,y\in X$, $\exists\lambda$ s.t. $\varphi(x)=\lambda\varphi(x)$, $\varphi(y)=\lambda\varphi(y)$, 此时 λ 仍与 x,y 有关.

3. 定义映射

$$
\begin{aligned}
\varphi:\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4\\
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2\\ x_1-x_3\\ x_2+x_3\\ x_1+2x_2+x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(1) 证明 φ 是线性映射;

(2) 求 φ 在标准基下的矩阵;

(3) 计算 $ker(\varphi)$ 和 $im(\varphi)$ 的维数

(4) 分别计算 $ker(\varphi)$ 和 $im(\varphi)$ 的一组基底.

(1) 显然.

(2) $\varphi(e_1)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\varphi(e_2)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$ $\varphi(e_3)=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\0&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$$

(3) $A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\dim(\ker\varphi)=1$

$\dim(\mathrm{im}\,\varphi)=2$

(4) $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\in\ker\varphi$ $\dim(\ker\varphi)=1$ 故而此为其一组基.

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\notin\ker\varphi$, $\mathrm{im}\,\varphi=\langle\varphi(e_1),\varphi(e_2)\rangle$

线性无关

$\varphi(e_1)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\varphi(e_2)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$

4. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}7&8&9\\0&10&11\\0&0&12\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}3&2&5\\7&-1&0\\-2&5&3\end{pmatrix}$$

计算 $3A-2B,2C+3B$.

$$3A-2B=\begin{pmatrix}-11&-10&-9\\0&-8&-7\\0&0&-6\end{pmatrix}$$

$$2C+3B=\begin{pmatrix}27&28&37\\14&28&33\\-4&10&42\end{pmatrix}$$

5. 设映射 $\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m:\vec{x}\mapsto\begin{pmatrix}f_1(\vec{x})\\f_2(\vec{x})\\\cdots\\f_m(\vec{x})\end{pmatrix}$. 求证:$\varphi$ 是线性映射 $\Leftrightarrow f_1,f_2,\cdots,f_m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性函数.

φ 线性

$\Updownarrow$

$$\begin{pmatrix}f_1(k\vec{x}+l\vec{y})\\\vdots\\f_m(k\vec{x}+l\vec{y})\end{pmatrix}=\varphi(k\vec{x}+l\vec{y})=k\varphi(\vec{x})+l\varphi(\vec{y})=\begin{pmatrix}kf_1(\vec{x})+lf_1(\vec{y})\\\vdots\\kf_m(\vec{x})+lf_m(\vec{y})\end{pmatrix}$$

$\forall\ k,l\in\mathbb{R},\ \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n.$

$\Updownarrow$

$f_i(k\vec{x}+l\vec{y})=kf_i(\vec{x})+lf(\vec{y})\quad i=1,\cdots,m.$

$\forall\ k,l\in\mathbb{R}$

$\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n.$ $\square$