第六次习题课

一、矩阵的初等变换与矩阵的秩

1. 如果单纯只求矩阵的秩，做初等行变换或初等列变换，甚至行列变换并用都可以，因为矩阵的行秩等于列秩。

   三类初等变换 a. 互换两行(列)位置

   b. 把某一行(列)乘一常数加到另一行(列)

   c. 把某一行(列)乘一常数

2. 如果已知矩阵要求其行(列)向量的一组极大线性无关组，只要不做互换两行(列)位置的初等变换即可，为了化简完之后好找相应位置所对应的原矩阵中的向量。

eg1. 计算下述矩阵的秩，并且求A的列向量组的一个极大线性无关组。

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & 8 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$a_0=0 \quad \operatorname{rank} B = n-1$

$a_0\neq 0 \quad \operatorname{rank} B = n$

$$C=\begin{pmatrix} \lambda & \mu & \cdots & \mu & 1 \\ \mu & \lambda & \cdots & \mu & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu & \mu & \cdots & \lambda & 1 \\ \mu & \mu & \cdots & \mu & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda-\mu & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-\mu & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-\mu & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda=\mu \quad \operatorname{rank} C=1$

$\lambda\neq\mu \quad \operatorname{rank} C=n$

eg2. 在$\mathbb{R}^4$中,求下述向量组$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$生成的子空间的一个基和维数。

$$\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\4\\9\\1\end{pmatrix},\quad \vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\0\\-5\\3\end{pmatrix},\quad \vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\\5\end{pmatrix},\quad \vec{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 9 & -5 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -27 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim\langle\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4\rangle=\operatorname{rank}(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)=3$.

$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$是$\langle\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4\rangle$的一个基。

hw4. (1) 设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$,A增加一行,则秩或加1或不变。

(2) 设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$,$\operatorname{rank}A=r$. 则$\forall$ s行组成的矩阵B,
$\operatorname{rank}B\geqslant r+s-m$.

pf (1). 考虑A的行空间$V_r=\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_m\rangle\subseteq\mathbb{R}^n$ 则
$\operatorname{rank}(A)=\dim\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_m\rangle$, A增加一行 即增加一个行向量$\vec{v}_{m+1}$,则要么$\vec{v}_{m+1}\in V_r$,则$\operatorname{rank}(A)=\dim V_r$不变,

要么 $\vec{v}_{m+1} \notin V_r$ 即 $\vec{v}_{m+1}$ 与 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m$ 线性无关，

则 $\dim\langle \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_{m+1} \rangle = \operatorname{rank}A + 1$.

(2) $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$ 由(1) B增加一行 rankB 不变或+1

则B增加 $(m-s)$ 行后得到A $\Rightarrow \operatorname{rank}B \le \operatorname{rank}A$

$\le \operatorname{rank}B + m - s$

$\therefore \operatorname{rank}B \geq r + s - m$

注：行空间与列空间本就不同.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$V_r(A) = \langle (1,0) \rangle$

$V_c(A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ 经过变换后：$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. 确实可以取不同的基 但维数一定相同。

eg3. 设A是 $s\times n$ 矩阵，B是 $l\times m$ 矩阵，C是 $s\times m$ 矩阵.

证明：
$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

证明：设 $\operatorname{rank}(A) = r$, $\operatorname{rank}(B) = t$. 则A有一个r级子矩阵 A_1, 使得 $|A_1| \neq 0$; B有一个t级子矩阵 B_1, s.t $|B_1| \neq 0$.

从而 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 有一个 $(r+t)$ 阶子式：

$$\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & B_1 \end{vmatrix} = |A_1||B_1| \neq 0.$$

[行列式的性质 第三章会学].

因此
$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq r + t = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

$\square$

hw 6. (1) $\mathrm{rank}(A)=s$ $\mathrm{rank}(B)=l$ 行满秩

(2) $\mathrm{rank}(A)=n$ $\mathrm{rank}(B)=m$ 列满秩

运用eg2即可。

hw5. $A=\begin{pmatrix}\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \\ \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n\end{pmatrix}$

试用平面上n条直线所成的集合的几何性质给出 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$ 的条件。

解: 考虑 $A^t=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \beta_n\end{pmatrix}$ $B^t=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n\end{pmatrix}$

二元齐次线性方程组的系数矩阵　　二元非齐次线性方程组的增广矩阵

非齐次线性方程组相容 $\Longleftrightarrow \mathrm{rank}(A^t)=\mathrm{rank}(B^t) \Longleftrightarrow \mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$

$\Updownarrow$

$\exists (x_0, y_0)\in\mathbb{R}^2$ s.t. $\alpha_i x_0+\beta_i y_0=\gamma_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 均成立

$\Updownarrow$

平面上n条直线 $\alpha_i x+\beta_i y=\gamma_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 有交点

二、线性方程组和矩阵的秩

1. L确定 $\Longleftrightarrow$ H确定

2. $\dim(\mathrm{sol}(H))+\mathrm{rank}(A)=n$.

hw3. $A\in\mathbb{R}^{5\times 7}$ $(V_A(A))=\langle\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\rangle$ 3个基底

$\Longrightarrow \dim V_A=3 \Longrightarrow \mathrm{rank}(A)=7-3=4$.

$\because 0\le \mathrm{rank}A\le 5$

$\therefore 2\le 7-\mathrm{rank}A\le 7 \Longrightarrow 2\le \dim V_A\le 7 \Longrightarrow \dim V_A\ne 1$.

hw 2. (1)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -5 \\ 3 & -1 & 5 & 6 & -1 \\ -5 & -3 & 1 & 2 & 11 \\ -9 & -4 & -1 & 0 & 17 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rank}(A)=2 \Rightarrow \dim(\operatorname{sol}(H))=3.$$

于是方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{11}{5}x_5 \\ x_2 = \frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_5 \end{cases}$$

其中 x_3, x_4, x_5 是自由未知量. 从而方程组的一个基础解系

$$\eta_1=\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3=\begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

因此齐次线性方程组的全部解为

$$\operatorname{sol}(H)=\{k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3 \mid k_i\in K, i=1,2,3\}$$
$$=\langle \eta_1, \eta_2, \eta_3\rangle$$

(2).

$$B=(A|\vec{b})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -5 \\ 3 & -1 & 5 & 6 & -1 \\ -5 & -3 & 1 & 2 & 11 \\ -9 & -4 & -1 & 0 & 17 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{8}{7} & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{18}{7} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\because \operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(A)=2 \quad \therefore \dim(\operatorname{sol}(L))=2.$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - \frac{8}{7}x_4 - 1 \\ x_2 = 2x_3 + \frac{18}{7}x_4 - 2 \end{cases}$$

$x_2 - 2x_3 + \frac{18}{7}x_4 = 2$

其中 x_3, x_4 是自由未知量．令 $x_3=0$, $x_4=0$, 得特解

$$\gamma_0 = (-1, -2, 0, 0)'.$$

齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - \frac{8}{7}x_4 \\ x_2 = 2x_3 + \frac{18}{7}x_4 \end{cases}$$

的两个线性无关的解为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -18 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

因此原方程组的全部解为

$$sol(L) = \{\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\} = \gamma_0 + \langle \eta_1, \eta_2 \rangle.$$

三、线性映射

1. 与基底无关的一些性质
2. 与基底和维数有关的性质.

a. 对偶定理,线性映射版

$$\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{im}(\varphi)) = n.$$

b. 命题 5.17

φ 满射可以找到 W 中一组基的原像。

hw1. (1) $[x_1, \cdots, x_n] \xmapsto{\varphi} [x_n, \cdots, x_1]$

$\forall \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha x_n + \beta y_n \\ \vdots \\ \alpha x_1 + \beta y_1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\varphi(\vec{x})+\beta\varphi(\vec{y})=\alpha\begin{pmatrix}x_n\\ \vdots\\ x_1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}y_n\\ \vdots\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_n+\beta y_n\\ \vdots\\ \alpha x_1+\beta y_1\end{pmatrix}.$$

$\varphi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha\varphi(\vec{x})+\beta\varphi(\vec{y})$. $\quad\therefore\ \varphi$ 是线性映射。

(2) $[x_1,\cdots,x_n]\xmapsto{\varphi}[x_1,x_2^2,\cdots,x_n^n]$

$\forall\ \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ \vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\varphi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\varphi\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\ \vdots\\ \alpha x_n+\beta y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\ (\alpha x_2+\beta y_2)^2\\ \vdots\\ (\alpha x_n+\beta y_n)^n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\ \alpha^2x_2^2\\ \vdots\\ \alpha^n x_n^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 2\alpha\beta x_2y_2\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(\alpha x_n)^k(\beta y_n)^{n-k}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta y_1\\ \beta^2y_2^2\\ \vdots\\ \beta^n y_n^n\end{pmatrix}$$

$$\alpha\varphi(\vec{x})+\beta\varphi(\vec{y})=\alpha\begin{pmatrix}x_1\\ x_2^2\\ \vdots\\ x_n^n\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}y_1\\ y_2^2\\ \vdots\\ y_n^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\ \alpha x_2^2+\beta y_2^2\\ \vdots\\ \alpha x_n^n+\beta y_n^n\end{pmatrix}$$

$\therefore\ \varphi$ 不是线性映射.

(3) φ 是线性映射（过程省略）

hw6. 同学的解答:

(1) $\because$ $A \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ $\text{rank}(A)=s$, $\text{rank}(B)=\ell$.

$\therefore$ 通过初等行变换

A可变化为
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{s \times n}$$

B可变化为
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{\ell \times m}$$

则 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 通过初等行变换，可得到 D.

$$D = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{s \times n} & \begin{pmatrix} x & x & \cdots & x \\ x & x & \cdots & x \\ \cdots & & \cdots & \\ x & x & \cdots & x \end{pmatrix}_{s \times m} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{\ell \times n} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{\ell \times m} \end{pmatrix}$$

易知 $\vec{D}_1, \cdots, \vec{D}_s$ 线性无关，$\vec{D}_{s+1}, \cdots \vec{D}_{s+\ell}$ 线性无关.

假设 $\exists\, w_1, \cdots, w_s \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\vec{D}_j = w_1\vec{D}_1 + \cdots + w_s\vec{D}_s = (w_1, w_2, \cdots, w_s, * * \cdots *)$$
$$= (\underbrace{0, 0 \cdots 0}_{s}, \underbrace{0 \cdots 0}_{j-s-1}\, 1, 0, \cdots, 0)$$

对于前s列，只有 $w_1 = \cdots = w_s = 0$ 时成立；

所对于第 j 列，$w_1=\cdots=w_s=0$ 显然不成立。

$\therefore \vec{D}_j$ 不能由 $\vec{D}_1,\cdots\vec{D}_s$ 线性表出

$\therefore \vec{D}_1,\cdots,\vec{D}_s,\vec{D}_{s+1},\cdots\vec{D}_{s+l}$ 线性无关

$\because \vec{D}_1,\cdots,\vec{D}_s,\vec{D}_{s+1},\cdots\vec{D}_{s+l}\subset\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}_{(s+l)\times(n+m)}$

$\therefore \vec{D}_1,\cdots,\vec{D}_s,\vec{D}_{s+1},\cdots,\vec{D}_{s+l}$ 为 $\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 的一组基。

$$\therefore \operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}=\dim\left(V_r\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}\right)=s+l=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B).$$

(2) $\because A\in\mathbb{R}^{s\times n}$，$B\in\mathbb{R}^{l\times m}$，$\operatorname{rank}(A)=n$，$\operatorname{rank}(B)=m$.

$\therefore$ 通过初等列变换，

$$A\text{可变化为}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}_{s\times n}$$

$$B\text{可变化为}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1\\ 0 & 0 & 0 & & 0\end{pmatrix}_{l\times m}$$

$\therefore \begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 通过初等列变换，可得到

$$E=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}_{s\times n} & \begin{pmatrix}x & x & \cdots & x\\ x & x & \cdots & x\\ x & x & \cdots & x\end{pmatrix}_{s\times m}\\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}_{l\times n} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}_{l\times m}\end{pmatrix}$$

易知 $\vec{E}^{(1)},\cdots,\vec{E}^{(n)}$ 线性无关，$\vec{E}^{(n+1)},\cdots\vec{E}^{(m)}$ 线性无关.

假设 $\exists\, \mu_{n+1},\cdots,\mu_{n+m}\in\mathbb{R}$ s.t. $\forall\, i\in\{1,\cdots,n\}$

有 $\vec{E}^{(i)}=\mu_{n+1}\vec{D}^{(n+1)}+\cdots+\mu_{n+m}\vec{D}^{(n+m)}$

$$=(*,\cdots,*,\mu_{n+1},\cdots,\mu_{n+m})^t$$

$$=(\underbrace{0,\cdots,0}_{i-1},1,0,\cdots,0)^t$$

$\therefore$ 要使等式成立，对于第 $n+1$ 至 $n+m$ 行，需满足 $\mu_{n+1}=\cdots=\mu_{n+m}=0$

而此时第 i 行也为 0，与 $\vec{E}^{(i)}$ 第 i 行矛盾。

$\therefore$ $\vec{E}^{(i)}$ 不能由 $\vec{E}^{(n+1)},\cdots,\vec{E}^{(n+m)}$ 线性表出，

$\therefore$ $\vec{E}^{(1)},\cdots,\vec{E}^{(n)},\vec{E}^{(n+1)},\cdots,\vec{E}^{(n+m)}$ 线性无关。

$\because$ $\vec{E}^{(1)},\cdots,\vec{E}^{(n)},\vec{E}^{(n+1)},\cdots,\vec{E}^{(n+m)}$ $\subset$ $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}_{(s+\ell)\times(n+m)}$

$$\therefore \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}=\dim\left(V_c\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\right)$$

$$=n+m$$

$$=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B).$$