1. 在下述映射中, 哪些是线性映射:

(1) $[x_1, x_2, \cdots, x_n] \mapsto [x_n, x_2, \cdots, x_1]$,

(2) $[x_1, x_2, \cdots, x_n] \mapsto [x_1, x_2^2, \cdots, x_n^n]$,

(3) $[x_1, x_2, \cdots, x_n] \mapsto [x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n]$.

(1), (3).

2. 计算

(1) 求下述数域 $\mathbb{R}$ 上齐次线性方程组解空间的一组基, 并且写出它的全部解.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ -x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - 14x_2 + 22x_3 - 9x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

(2) 求下述数域 $\mathbb{R}$ 上非齐次线性方程组的全部解.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= -5, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= -1, \\ -5x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 11, \\ -9x_1 - 4x_2 - x_3 &= 17. \end{cases}$$

(1) $$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & -4 \\ -1 & -7 & 9 & -4 & -5 \\ 3 & -14 & 22 & -9 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{11}{5}x_5 \\ x_2 = \frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_5 \end{cases}$$

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -5 \\ 3 & -1 & 5 & 6 & -1 \\ -5 & -3 & 1 & 2 & 11 \\ -9 & -4 & -1 & 0 & 14 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{8}{7} & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{18}{7} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x_1 = -x_3 - \frac{8}{7}x_4 - 1$
$x_2 = 2x_3 + \frac{18}{7}x_4 - 2$

$x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow$ 特解 $\gamma_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

非齐次线性方程组的解一般不写 dim.

齐次部分有解 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\eta_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

解集 $U = \{\gamma_0 + k\eta_1 + k\eta_2 \mid k_1, k_2 \in K\}$.

3. 设 $A \in \mathbb{R}^{5\times7}$, 并且以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组解空间 V_A 的基底由 3 个向量组成, 求 $rank(A)$. 问:V_A 的维数可能是 1 吗?

① $\dim V_A = 3$, $\operatorname{ran}(A) = 7-3 = 4$.

记号问题,不同型矩阵不讨论 +,-.

② $0 \leq rank(A) \leq 5$, $\dim V_A = 7 - rank(A)$

$\Longrightarrow 2 \leq \dim V_A \leq 7$ □

4. 证明:

(1) 矩阵加一行, 则秩或者不变或者增加 1;

(2) 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $rank(A)=r$, 则 A 的任意 s 行可组成一个秩不小于 $r+s-m$ 的矩阵.

(1) 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\langle v_1, \cdots, v_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ 为行向量. 加一行 v_{m+1}

$\Rightarrow rank\langle v_1, \cdots, v_m, v_{m+1} \rangle = \begin{cases} rank\langle v_1, \cdots, v_m \rangle, & v_{m+1} \text{ 由 } v_1, \cdots, v_m \text{ 线性表示} \\ rank\langle v_1, \cdots, v_m \rangle + 1 & \text{其它}. \end{cases}$

(2) $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$ 为 A 某 s 行组成的矩阵，则 A 可看作 B 加 $m-s$ 行所得. $\Rightarrow \mathrm{rank}(B)\le \mathrm{rank}(A)\le \mathrm{rank}(B)+m-s$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{rank}(B)\geq \mathrm{rank}(A)+s-m=r+s-m.$$

5. 设两个矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n\end{pmatrix},$$

试用平面上 n 条直线所成集合的几何性质给出 A 和 B 有相等秩的条件.

考虑 $A^t=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \vdots & \vdots\\ \alpha_n & \beta_n\end{pmatrix}$ $\quad$ $B^t=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n\end{pmatrix}$

$\Updownarrow$ $\quad$ $\Updownarrow$

二元齐次线性方程组 L_A 的系数矩阵 $\quad$ 二元非齐次线性方程组 L_B 的增广.

L_B 相容 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A^t)=\mathrm{rank}(B^t)\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$

$\Updownarrow$

$\exists x_0, y_0$ s.t. $\alpha_i x_0+\beta_i y_0=\gamma_i \quad \forall i=1,\cdots,n.$

$\Updownarrow$

平面直线 $\alpha_i x+\beta_i y=\gamma_i$ 有交点.

6. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 分别是数域 $\mathbb{R}$ 上 $s\times n, l\times m$ 矩阵, 证明:

(1) 如果 $rank(\mathbf{A})$=s,$rank(\mathbf{B})$=l, 那么

$$rank\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}\end{pmatrix}=rank(\mathbf{A})+rank(\mathbf{B}).$$

(2) 如果 $rank(\mathbf{A})$=n,$rank(\mathbf{B})$=m, 那么

$$rank\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}\end{pmatrix}=rank(\mathbf{A})+rank(\mathbf{B}).$$

Pf：(1) rank A = s ， 对前 s 行作行变换. 再作列 rank(A) = s

$$\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}\longrightarrow\left(\begin{array}{c|c|c}1\ \ddots\ 1 & * & C'\\ \hline 0 & 0 & B\end{array}\right)$$

再对后 l 行作行变换，后 m 列作列变换.

$$\left(\begin{array}{c|c|c}1\ \ddots\ 1 & * & C'\\ \hline 0 & 0 & B\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{c|c|c|c}1\ \ddots\ 1 & * & \multicolumn{2}{c}{C''}\\ \hline 0 & 0 & 1\ \ddots\ 1 & *\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow rank\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}=rank(A)+rank(B)$$

(2) 先对后 m 列进行初等列变换后 l 行初等行变换，再对前 n 列作列变换.
前 s 行 行变换.

$$\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}\longrightarrow\left(\begin{array}{c|c}A & C'\\ \hline 0 & \begin{matrix}1\ \ddots\ 1\\ *\end{matrix}\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{c|c}\begin{matrix}1\ \ddots\ 1\\ *\end{matrix} & C''\\ \hline 0 & \begin{matrix}1\ \ddots\ 1\\ 0\end{matrix}\end{array}\right)=rank\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}=ran(A)+rank(B).$$

6题第二种证法：

1) 设 $A=\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_s \end{pmatrix}$ 为A的行. $B=\begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_l \end{pmatrix}$ 为B中的行.

rank $A=s$ 则 $A_1,\cdots,A_s$ 线性无关. rank $B=l$ $B_1,\cdots,B_l$ 线性无关.

$\begin{pmatrix} A & C \\ & B \end{pmatrix}$ 中行为
$$\begin{aligned}(A_1, C_1) &= v_1 \\ &\vdots \\ (A_s, C_s) &= v_s \\ (0, B_1) &= v_{s+1} \\ &\vdots \\ (0, B_l) &= v_{s+l}\end{aligned}$$

若 $x_1 v_1+\cdots+x_{s+l} v_{s+l}=0$

$\Rightarrow x_1 A_1+\cdots+x_s A_s=0 \Rightarrow x_1=\cdots=x_s=0$

$\Rightarrow x_{s+1} B_1+\cdots+x_{s+l} B_l=0 \Rightarrow x_{s+1}=\cdots=x_{s+l}=0$

$\Rightarrow v_1,\cdots,v_{s+l}$ 线性无关

$\Rightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ & B \end{pmatrix}=s+l=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

Rem：若第6题中题目条件不满足，则命题 $r\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}=r(A)+r(B)$ 一般不成立. eg：$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$D=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r(D)=3>r(A)+r(B).$$

但我们始终有 $r(D)\geqslant r(A)+r(B)$.

Def: 给定 V, W 两线性空间，称 $f: V \longrightarrow W$ 为线性映射.

若 $\begin{cases} f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2) \\ f(kv) = kf(v) \end{cases}$ $\forall\ v, v_1, v_2 \in V,\ k \in K.$

Def: 称两个 K 线性空间 V, W 是同构的若 $\exists$ 线性映射

$f: V \longrightarrow W$

s.t. 一 为双射。

有限维线性空间间的线性映射：

设 $(V, +, \cdot)$ 为一 K 线性空间，$v_1, \cdots, v_n$ 为其一组基.

则 $\forall\ v \in V$，v 可以唯一表示为

$$v = k_1v_1 + \cdots + k_nv_n$$

则 V 中元素可以与 K^n 中元素一一对应.

考虑映射 $f: V \longrightarrow K^n$，

$$v \longmapsto \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

易知其为线性映射，其可逆 f^{-1} 也为线性映射.

也就是说，任何有限维 K 线性空间同构于 $(K^n, +, \cdot)$

设 $V \xrightarrow{f_A} W$ 为一线性映射，取 V, W 一组基

$v_1,\dots,v_n$, $w_1,\dots,w_m$ 设 $f(v_i)=\sum_{j=1}^{m} a_{ji}w_j$

则 $f\left(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{n} k_i\cdot f(v_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_i\cdot a_{ji}w_j$.

考虑下图

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "\simeq"] & W \arrow[d, "\simeq"] \\
K^n \arrow[r, "A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}"] & K^m
\end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} k_i\cdot a_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} k_i a_{mi} \end{pmatrix}$$

我们有 $f_A \longleftrightarrow A$

一一对应

若又有

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "g_B"] \arrow[d] & U \arrow[d] \\
K^m \arrow[r] & K^s
\end{tikzcd}$$

$u_1,\dots,u_s$ 为 U 的一组基.

若 $g(w_i)=\sum_{j=1}^{s} b_{ji}u_j$

$\forall\ w\in W$, $w=\sum_{i=1}^{n} x_i w_i$

$g(w)=\sum_{i=1}^{n} x_i g(w_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\cdot b_{ji}u_j$

$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_{ji}\right)u_j$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f_A"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "g_B\circ f_A"] & W \arrow[r, "g_B"] \arrow[d] & U \arrow[d] \\
K^n \arrow[r, "A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}"] \arrow[rr, bend right, "C={[c_{ij}]}:=B\cdot A"'] & K^m \arrow[r, "B\begin{bmatrix} b_{11} & & b_{1m} \\ b_{s1} & \cdots & b_{sm}\end{bmatrix}"] & K^s
\end{tikzcd}$$

$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\cdot a_{kj}$

$g_B\circ f_A$ 对应?

$g_B\circ f_A(e_i)$

$=g_B\circ\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}w_j\right)$

$=\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, g_B(w_j)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{s} a_{ji}\cdot b_{lj}u_l$

$=\sum_{l=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{lj}\cdot a_{ji}\right)\cdot u_l$