第五次习题课

一、作业解答及需要注意的问题

Def 1.（线性闭集）$V\subseteq\mathbb{R}^n$ 称为线性闭集，若对 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，
（子空间）
$$\vec{v_1},\vec{v_2}\in V\Longrightarrow\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}\in V.$$

线性闭集的和、直和与补.

令 V_1,V_2 为 $\mathbb{R}^n$ 中线性闭集，定义 V_1 与 V_2 的和空间.
$$V_1+V_2=\{\vec{v_1}+\vec{v_2}\mid \vec{v_i}\in V_i,\ i=1,2\}.$$

显然 $V_1+V_2=\langle V_1\cup V_2\rangle$

Def 2. 若 $V_1\cap V_2=\{\vec{0}\}$，则称 V_1+V_2 为直和，记为 $V_1\oplus V_2$.

命题2：$V=V_1\oplus V_2\Longleftrightarrow\forall\vec{x}\in V$ 都可以唯一地表为 $\vec{x}=\vec{x_1}+\vec{x_2}$，其中 $\vec{x_i}\in V_i$.

证："$\Longrightarrow$" $V=V_1\oplus V_2$. 若 $\vec{x}=\vec{x_1}+\vec{x_2}=\vec{x_1}'+\vec{x_2}'$，其中 $\vec{x_i},\vec{x_i}'\in V_i$，则 $\vec{x_1}-\vec{x_1}'=\vec{x_2}'-\vec{x_2}\in V_1\cap V_2=0$.

故 $\vec{x_i}=\vec{x_i}'$ 即 $\vec{x}$ 表达方式唯一。

"$\Longleftarrow$" 只需证 $V_1\cap V_2=\{\vec{0}\}$

若 $\vec{x}\in V_1\cap V_2$，则 $\vec{x}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}+\vec{0}$ 故 $\vec{x}=\vec{0}$. □

Def 3. 设 $V\subseteq\mathbb{R}^n$ 是线性闭集，如果 $V=V_1\oplus V_2$，称 V_2 为 V_1 在 V 中的一个补，并称 V_1 为 V_2 在 V 中的一个补。

Que1：如何计算 V_1 在 V 中的一个补？

设 V_1 的一组基为 $\vec{u_1},\cdots,\vec{u_r}$，则可知 $\exists\,\vec{u}_{r+1},\cdots,\vec{u}_d$ s.t. $\vec{u_1},\cdots,\vec{u_r},\vec{u}_{r+1},\cdots,\vec{u}_d$ 是 V 的一组基，即
$$V=\langle\vec{u_1},\cdots,\vec{u_r},\vec{u}_{r+1},\cdots,\vec{u}_d\rangle$$
$$=\underbrace{\langle\vec{u_1},\cdots,\vec{u_r}\rangle}_{V_1}+\langle\vec{u}_{r+1},\cdots,\vec{u}_d\rangle$$

令 $V_2=\langle\vec{u}_{r+1},\cdots,\vec{u}_d\rangle$ 显然 $V_1\cap V_2=\{\vec{0}\}$. 故 V_2 是 V_1 在 V 中的一个补。

Que 2: 补空间是唯一确定的吗？

答案是否定的. 反例 $\mathbb{R}^2 = \langle (1,0) \rangle \oplus \langle (0,1) \rangle$

$= \langle (1,0) \rangle \oplus \langle (1,1) \rangle$

取 $V_1 = \langle (1,0) \rangle$, $V_2 = \langle (0,1) \rangle \neq V_3 = \langle (1,1) \rangle$.

hw1. $\begin{pmatrix} \vec{A_1} \\ \vec{A_2} \\ \vec{A_3} \\ \vec{A_4} \end{pmatrix}$ $\quad (\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \vec{A}^{(3)}, \vec{A}^{(4)})$

① 首先判断两个线性无关,再增加一个,若三个为一组的都线性无关,再增加一 ...

② 通过初等行(列)变换.

③ 注意秩的定义, 行秩 $\dim(V_r(A))$ = 列秩 $\dim(V_c(A))$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hw2. (1) i) $k_1 \vec{\alpha_1} + k_2 \vec{\alpha_2} = \vec{0}$ $\quad k_1 = k_2 = 0$

ii) $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}$ 不成比例也可

(2). $\vec{\alpha}_3=-\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$

首先由 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 线性无关, 增 $\vec{\alpha}_3$ 判断线性相关. ×

增 $\vec{\alpha}_4$ 判断线性无关. √

再增 $\vec{\alpha}_5$ 判断线性无关

$(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4,\vec{\alpha}_5)$ 直接做列的初等变换

hw3. 设 $S_0=\{\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_t\}\subset\mathbb{R}^n$ 且 $V=\langle S_0\rangle$. 令 $d=\dim V$.

证明: (i) $d\le t$ (ii) 当 $d=t$ 时, $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_t$ 线性无关.

证: 设B是 S_0 中的一个极大线性无关组 则B是V的一组基.

(i) $\because d=|B|\le|S_0|=t \quad \therefore d\le t$

(ii) 设 $d=t$ 则 $|B|=|S_0|$

$\because S_0$ 有限且 $B\subset S_0$ $\therefore B=S_0 \Longrightarrow \vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_t$ 线性无关。

hw4. 解: V中任一向量 $\vec{\alpha}=(a_1,\cdots,a_r,0,\cdots0)^t$ 可以表示成

$$\vec{\alpha}=a_1\vec{\varepsilon}_1+\cdots+a_r\vec{\varepsilon}_r$$

显然 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_r\in V$. 由于 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_r,\cdots\vec{\varepsilon}_n$ 线性无关, 因此它的一个部分组 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_r$ 也线性无关。从而 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_r$ 是V的一个基. 于是 $\dim V=r$.

从作业4中可以看出. 在求一个线性空间或一个子空间的基和维数时, 通常

Step 1: 先探索任意一个向量能由哪些向量线性表出.

Step 2: 证明这些向量是线性无关的。

若已知维数为n. 那么 $\begin{cases}\text{只要找出n个线性无关的向量, 则为一组基}\\ \text{或者找n个向量 s.t. 任一向量都可以由这n个向量线性表出。}\end{cases}$

hw5. $\dim(W+V)+\dim(W\cap V)=\dim W+\dim V=2n-2$

$\because V\subset V+W\subset\mathbb{R}^n$

$\therefore\ \dim(V) \le \dim(V+W) \le \dim \mathbb{R}^n$ 即 $n-1 \le \dim(V+W) \le n$.

$\because\ V\cap W \subset V$

$\therefore\ \dim(V\cap W) \le n-1$ 由于 $\dim(W+V)\le n$ 和维数公式

可知 $\dim(V\cap W) \ge n-2$.

因此：$n-1 \le \dim(W+V) \le n$, $n-2 \le \dim(W\cap V) \le n-1$.

①：证明 $\dim(W+V)=n$. 若 $\dim(W+V)=n-1$. 则由 $W, V\subset W+V$

且 $\dim(W)=\dim(V)=n-1$

可得 $W=V=W+V$. 矛盾. 因此 $\dim(W+V)=n$.

由维数公式可得 $\dim(W\cap V)=n-2$.

② 证明 $\dim(W\cap V)=n-2$. 如果 $\dim(W\cap V)=n-1$. 则由

$W\cap V\subset W$, $W\cap V\subset V$ 且 $\dim(W)=\dim(V)=n-1$

可得 $W=V=W\cap V$ 矛盾. $\dim(W\cap V)=n-2$

$\Longrightarrow$ $(W+V)=n$.

二、课程内容回顾和补充.

1. 极大线性无关组

Def 4、若向量组 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$ 的每一个向量都可以由向量组 $\vec{\beta}_1,\cdots\vec{\beta}_r$ 线性表出，则称向量组 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$ 可以由向量组 $\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_r$ 线性表出。若彼此互相线性表出，则称这两个向量组等价.

$\{\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s\} \cong \{\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_r\}$.

eg 1. 如果 $\vec{u}$ 可以由 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$ 线性表出，则 $\vec{u}$ 可由其极大线性无关组线性表出。

proof：由题意：$\exists a_1,\cdots,a_s\in\mathbb{R}$ s.t. $\vec{u}=a_1\vec{\alpha}_1+\cdots+a_s\vec{\alpha}_s$.

不失一般性 设 $\{\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_m\}$ 为 $\{\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s\}$ 的极大线性无关组 $(m\le s)$.

则 $\vec{x}_i=\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\vec{u}_j \quad (b_{ij}\in\mathbb{R})$

$$\therefore\ \vec{u}=\sum_{i=1}^{s} a_i\Big(\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\vec{u}_j\Big) \Longrightarrow \vec{u}=\sum_{i=1}^{s}\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{m} b_{ij}a_i}_{c_j}\Big)\vec{u}_j$$

$$\Longrightarrow \vec{u}=\sum_{j=1}^{s} c_j\vec{u}_j \qquad \square$$

prop 1. 向量组 $\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_s$ 与它的任意一个极大线性无关组等价。

prop 2. 向量组 $\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_s$ 的任意两个极大线性无关组等价。

prop 3. 向量组 $\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_s$ 的任意两个极大线性无关组所含向量的个数相等。

Def 5. 向量组的一个极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩。

prop 4. 向量组 $\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_s$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 秩等于所含向量个数。

2. 基底与维数

a. 基底的定义

b. 基底与极大线性无关组 $\langle S\rangle$.

c. 基扩充定理.

有限维线性空间 (V):

prop 5. n 维线性空间中, 任意 $n+1$ 个向量都线性相关。

prop 6. 设 $\dim V=n$, 则 V 中任意 n 个线性无关的向量都是 V 的一个基。

prop 7. 设 $\dim V=n$, 则 V 中任意一个线性无关的向量组都可以扩充成 V 的一个基。

proof：设 $\vec{\alpha_1},\cdots,\vec{\alpha_s}$ 是 V 中线性无关向量组。

$s=n$. 由prop6 V.

$s<n$. 则必有 $\vec{\beta_1}$ 不能由 $\vec{\alpha_1},\cdots,\vec{\alpha_s}$ 线性表出

于是 $\vec{\beta_1},\vec{\alpha_1},\cdots,\vec{\alpha_s}$ 线性无关.

若 $s+1<n \Rightarrow \vec{\beta_1},\vec{\beta_2},\vec{\alpha_1},\cdots,\vec{\alpha_s}$ 线性无关.

$\vec{\beta_1},\vec{\beta_2}\cdots,\vec{\beta_r},\vec{\alpha_1},\cdots,\vec{\alpha_s}$ 线性无关。

$r+s=n$.

eg2. $X_1,\cdots,X_n\in\mathbb{R}^n$ $\langle X_1,\cdots,X_n\rangle=\mathbb{R}^n \Leftrightarrow X_1,\cdots,X_n$ 线性无关.

proof："$\Rightarrow$" 设 $\langle X_1,\cdots,X_n\rangle=\mathbb{R}^n$. $(d<n)$

反证. $X_1,\cdots,X_n$ 线性相关. 则 $\exists\{X_{i_1},\cdots X_{i_d}\}\subseteq\{X_1,\cdots,X_n\}$

构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. $\therefore \dim(\mathbb{R}^n)=d<n$. 矛盾.

"$\Leftarrow$" 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 线性无关

$\because \mathbb{R}^n$ 中任意 $n+1$ 个向量线性相关

$\therefore$ 对 $\forall X\in\mathbb{R}^n$ $\exists\ \alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ 不全为0 s.t.

$\alpha X+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i=\vec{0}$ 且如果 $\alpha=0\Rightarrow\alpha_i=0$.

$\therefore \alpha\neq0$

$\therefore X=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\alpha_i}{\alpha}\right)X_i\in\langle X_1,\cdots,X_n\rangle$

$\Rightarrow \mathbb{R}^n\subseteq\langle X_1,\cdots,X_n\rangle$

显然 $\because X_i\in\mathbb{R}^n$ $\therefore \langle X_1,\cdots,X_n\rangle\subseteq\mathbb{R}^n$

$\therefore \mathbb{R}^n=\langle X_1,\cdots,X_n\rangle$.

同学的第六题解法：

$\because$ 同为 $\mathbb{R}^4$ 的一组基的向量个数至多有4个

$\therefore$ 由基扩充定理，此极大线性无关组是 $\mathbb{R}^4$ 的一组基

记 $\lambda_1\vec{\alpha_1}+\lambda_2\vec{\alpha_2}+\lambda_4\vec{\alpha_4}+\lambda_5\vec{\alpha_5}=\lambda_3\vec{\alpha_3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 7 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & -\frac{17}{2} & -1 & -7 & \frac{17}{2} \\ 0 & -7 & 7 & -11 & 7 \\ 0 & -\frac{31}{2} & 2 & -16 & \frac{31}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & -7 & 7 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{2} & \frac{89}{14} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{27}{2} & \frac{117}{14} & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & -7 & 7 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{27}{2} & \frac{117}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{21} & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_4 = 0 \\ \lambda_5 = 0 \end{cases}$

$\therefore$ 系数为 $1, -1, 0, 0$

3. 证明：$\because \dim(V)=d$ $\therefore$ 设向量组 S 的一组极大线性无关组为 $\vec{w_1},\dots,\vec{w_d}$

故 $\vec{w_1},\dots,\vec{w_d}$ 为 V 的一组基底

$\because \langle \vec{v_1},\dots,\vec{v_t}\rangle = V$ $\therefore \forall i\in\{1,\dots,d\}$，$\vec{w_i}$ 是 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_t}$ 的线性组合

$\because \vec{w_1},\dots,\vec{w_d}$ 线性无关 $\therefore$ 由线性组合引理，$d\le t$

$\because \vec{w_1},\dots,\vec{w_d}$ 是向量组 S 的一组极大线性无关组

当 $t=d$ 时，假设 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_t}$ 线性相关，则 $\exists\, \vec{v_{n_1}},\dots,\vec{v_{n_k}}\in S_0$，s.t. $\vec{v_{n_1}},\dots,\vec{v_{n_k}}$ 为 S_0 的一个极大线性无关组 $(1\le k<t)$

$\because \langle \vec{v_1},\dots,\vec{v_t}\rangle = V$ $\therefore \vec{v_{n_1}},\dots,\vec{v_{n_k}}$ 为 V 的一组基底 $\therefore \dim(V)=k\ne t$

$\therefore \vec{v_1},\dots,\vec{v_t}$ 线性无关

4. 解：取 $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$，$\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$，……，$\vec{e_r}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$

则 $\forall \vec{\alpha}\in U$，记 $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_r\\ 0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$，则 $\vec{\alpha}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\dots+\alpha_r\vec{e_r}$

同时，对于 $\lambda_1\vec{e_1}+\dots+\lambda_r\vec{e_r}=\vec{0}$，即 $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_r\\ 0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$，当且仅当 $\lambda_1=\dots=\lambda_r=0$ 时成立

$\therefore \vec{e_1},\dots,\vec{e_r}$ 线性无关

$\therefore$ 子空间的一个基为 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_r}$，维数为 r

5. 证明：由维数公式：$\dim(V+W)+\dim(V\cap W)=\dim(V)+\dim(W)=2n-2$

$\because V\subset V+W$，$V+W\subset\mathbb{R}^n$ $\therefore n-1\le\dim(V+W)\le n$，即 $\dim(V+W)=n$ 或 $n-1$

若 $\dim(V+W)=n-1$，则 $\dim(V\cap W)=n-1$

$\because V\cap W\subset V$，$V\cap W\subset W$ 且 $\dim(V)=\dim(W)=n-1$ $\therefore V=W=V\cap W$ $\therefore$ 矛盾

$\therefore \dim(V+W)=n$，$\dim(V\cap W)=n-2$

6. 解：记该向量组为 $S=\{\vec{v_1},\dots,\vec{v_s}\}$，其中不妨设 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_{s-1}}$ 是一组极大线性无关组，$\vec{v_s}=k\vec{v_1}\ (k\ne0)$

假设 $\vec{v_s}$ 能由 $\vec{v_2},\dots,\vec{v_{s-1}}$ 线性表出，即 $\exists\,\alpha_2,\dots,\alpha_{s-1}$ 满足 $\alpha_2\vec{v_2}+\dots+\alpha_{s-1}\vec{v_{s-1}}=\vec{v_s}$

则 $\vec{v_1}=\frac{\alpha_2}{k}\vec{v_2}+\dots+\frac{\alpha_{s-1}}{k}\vec{v_{s-1}}$，即 $(-1)\vec{v_1}+\frac{\alpha_2}{k}\vec{v_2}+\dots+\frac{\alpha_{s-1}}{k}\vec{v_{s-1}}=\vec{0}$，与 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_s}$ 线性无关矛盾

$\therefore \vec{v_2},\dots,\vec{v_s}$ 线性无关

$\because \vec{v_1},\dots,\vec{v_{s-1}}$ 是一组极大线性无关组 $\therefore \forall\vec{\beta}\in S$，$\exists\,\beta_1,\dots,\beta_{s-1}$ s.t. $\beta_1\vec{v_1}+\dots+\beta_{s-1}\vec{v_{s-1}}=\vec{\beta}$

$\therefore \frac{\beta_1}{k}\vec{v_s}+\beta_2\vec{v_2}+\dots+\beta_{s-1}\vec{v_{s-1}}=\vec{\beta}$ $\therefore \vec{v_2},\dots,\vec{v_{s-1}}$ 是 S 的一组极大线性无关组

假设 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_i},\vec{v_{i+2}},\dots,\vec{v_s}$ $(i\in\{1,\dots,s-2\})$ $\because k\vec{v_1}+\dots+0\cdot\vec{v_i}+0\cdot\vec{v_{i+2}}+\dots+(-1)\vec{v_s}=\vec{0}$ $\therefore \vec{v_1},\dots,\vec{v_i},\vec{v_{i+2}},\dots,\vec{v_s}$ 线性相关

$\therefore \vec{v_1},\dots,\vec{v_i},\vec{v_{i+2}},\dots,\vec{v_s}$ 不是一组极大线性无关组 $\therefore S$ 的极大线性无关组有2个