1. 求以下矩阵的所有行向量的极大线性无关组, 以及所有列向量的极大线性无关组, 并计算其行秩与列秩.

$$v_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix} \cdots v_4=\begin{pmatrix}4\\0\\8\\4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&4&4&4\\1&2&1&0\\3&6&7&8\\1&2&3&4\end{pmatrix}.$$

考虑列 $x_1v_1+\cdots+x_4v_4=0$

1、
$$\begin{pmatrix}2&4&4&4\\1&2&1&0\\3&6&7&8\\1&2&3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&0&-1&-2\\0&0&1&2\\0&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&0&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&-2\\0&0&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$(x_1=2 \quad x_2=-1 \quad x_3=0 \quad x_4=0)$

$(x_1=-2 \quad x_2=0 \quad x_3=2 \quad x_4=-1$

$$\begin{cases}v_2=2v_1\\v_4=-2v_1+2v_3\end{cases}$$

v_1，v_3 线性无关，v_2，v_4 可由 v_1，v_3 线性表示

列秩为 2. 极大组有 $\{v_1,v_3\}$ $\{v_1,v_4\}$. $\{v_2,v_3\}$ $\{v_2,v_4\}$ $\{v_3,v_4\}$

记 $w_1=(2,4,4,4)$

$\vdots$

$w_4=(1,2,3,4)$

$y_1w_1+\cdots+y_4w_4=0$

$$\begin{pmatrix}2&1&3&1\\4&2&6&2\\4&1&7&3\\4&0&8&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&3&1\\0&0&0&0\\0&-1&1&1\\0&-2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&3&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行秩为 2，极大无关组 $\{w_1,w_2\}$，$\{w_1,w_3\}$，$\{w_1,w_4\}$，$\{w_2,w_3\}$，$\{w_2,w_4\}$ $\{w_3,w_4\}$.

2. 在 $\mathbb{R}^4$ 中, 设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\7\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}5\\-1\\3\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-3\\4\\1\\5\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\7\\2\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}6\\2\\1\\5\end{pmatrix},$$

(1) 证明:α_1,α_2 线性无关;

(2) 把 α_1,α_2 扩充成向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组, 并判断此极大线性无关组是否是 $\mathbb{R}^4$ 的一组基. 若是, 请计算剩余的一个向量由这组基线性表出的系数.

(1) $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=0$ $\begin{pmatrix}2&5\\3&-1\\4&3\\7&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&5\\1&-6\\0&1\\1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow x_2=0\Rightarrow x_1=0.$

$\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关.

(2) $x_1\alpha_1+\cdots+x_5\alpha_5=0$

$$\begin{pmatrix}2&5&-3&0&6\\3&-1&4&-1&2\\4&3&1&7&1\\7&2&5&2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&5&-3&0&6\\3&-1&4&-1&2\\1&4&-3&8&-1\\7&2&5&2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&-3&8&-1\\0&-3&3&-16&8\\0&-13&13&-25&5\\0&-26&26&-54&12\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&4&-3&8&-1\\0&-3&-3&-16&8\\0&-1&1&39&-27\\0&-2&-2&74&-52\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&-3&8&-1\\0&-1&1&39&-27\\0&0&0&-133&89\\0&0&0&-4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&-3&8&-1\\0&-1&1&39&-27\\0&0&0&-1&23\\0&0&0&-4&2\end{pmatrix}$$ 阶梯形

$\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ 为一极大无关组 $\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ 为一组基.

取 $x_3=1$ 解得 $x_1=-1$, $x_2=1$ $x_4=0$ $x_5=0$

i.e. $\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2$

3. 设向量组 S 生成子空间 $V = \langle S \rangle \subseteq \mathbb{R}^n, dim(V) = d$, 若 S 有一个子集 $S_0 = \{v_1, v_2, \cdots, v_t\}$ 满足 $\langle v_1, v_2, \cdots, v_t \rangle = V$ 证明 $t \geq d$. 并以此说明若 $t = d$, 则 $v_1, v_2, \cdots, v_t$ 线性无关.

pf: (i) 取 S 一极大线性无关组 $\{s_1, \cdots, s_d\}$

$V = \langle v_1, \cdots, v_t \rangle$ 则 $\{s_1, \cdots, s_d\}$ 可由 $\{v_1, \cdots, v_t\}$ 线性表示

若 $d > t$, 则 $s_1, \cdots, s_d$ 线性相关. 矛盾.

$\Rightarrow t \geq d$.

(ii) $t = d$ 时, $\{v_1, \cdots, v_d\}$ 为极大线性无关组. 故而线性无关.

4. 在 $\mathbb{R}^n$ 中，令

$$U = \{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_r \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} | a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, r\}.$$

其中 $r < n$. 求子空间 U 的一个基和维数.

$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-th 则 $U = \langle e_1, \cdots, e_r \rangle$ 且 $e_1, \cdots, e_r$ 线性无关

$\Rightarrow e_1, \cdots, e_r$ 为一组基 $\dim U = r$.

5. 设 $V, W \subset \mathbb{R}^n (n > 1)$ 是子空间, 并且 $V \neq W$ 和 $dim(V) = dim(W) = n-1$, 证明

$$dim(V+W) = n \text{ 和 } dim(V \cap W) = n-2.$$

pf: $\dim(V) = n-1$, $V \neq W \Rightarrow \exists\ w \notin V$

取 V 一组基 $v_1, \cdots, v_{n-1}$ 则 $v_1, \cdots, v_{n-1}, w$ 线性无关.

$\Rightarrow \dim(V+W) \geq n-1+1$ $V+W \subset \mathbb{R}^n$ $\dim(V+W) \leq n$

$\Rightarrow \dim(V+W) = n.$

维数公式 $\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W$

$\Rightarrow n + \dim(V \cap W) = 2(n-1)$

$\square$

6. 在数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 V 中,s 个向量的向量组如果它的极大线性无关组的个数为 $s-1$, 且包含成比例的非零向量. 试问: 此向量组有多少个极大线性无关组?

pf: $S = \{v_1, \cdots, v_s\}$ $\exists\ 1 \leq i < j \leq s$ s.t. $v_i = a v_j$ $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

取 T 为 S 的一个极大线性无关组.

v_i, v_j 线性相关, 则不能 $v_i \in T$ 且 $v_j \in T$,

则有 $v_i \notin T$ or $v_j \notin T$.

$T = S \setminus \{v_i\} = T_0$ or $T = S \setminus \{v_j\} = T_1$ T_0, T_1 可互相线性表示

若其中一个线性无关, 另一也线性无关.

$\Rightarrow$ 有两个极大组. $\square$

线性空间的一般定义

Def：设 V 是一个集合，K 为一个域 $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \cdots)$

设有映射 $+ : V\times V \longrightarrow V$，$(v_1, v_2) \longmapsto v_1+v_2$，$\cdot : K\times V \longrightarrow V$，$(k, v) \longrightarrow k\cdot v$

称 $(V, +, \cdot)$ 为一 K 线性空间，若：

① $v_1+v_2 = v_2+v_1$

② $(v_1+v_2)+v_3 = v_1+(v_2+v_3)$

③ $\exists$ 零元素 $0\in V$，s.t. $0+v=v \quad \forall v\in V$

④ $\forall v\in V \ \exists \, w\in V$ s.t. $v+w=0$. 记 w 为 $-v$，称 v 的逆

⑤ $1\in K$，$1\cdot v = v$.

⑥ $k, l\in K$. $(k\cdot l)v = k\cdot(lv)$

⑦ $l, k\in K$ $(l+k)\cdot v = l\cdot v + k\cdot v$

⑧ $k\in K$ $v_1, v_2\in V$ $k(v_1+v_2) = kv_1+kv_2$.

Rem：若 $(V, +)$ 满足 ①, ②, ③, ④，则称其为一个交换群.

可以证明零元与逆元唯一.

eg：(1) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ 为 $\mathbb{R}$ 线性空间，

(2) $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ 为 $\mathbb{C}$ 线性空间，

(3) $(\mathbb{Q}^n, +, \cdot)$ 为 $\mathbb{Q}$ 线性空间，

(4) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 为 $\mathbb{Q}$ 线性空间.

(5) $(C([a,b]), +, \cdot)$ 为 $\mathbb{R}$ 上线性空间.

$C([a,b]) = \{ f: [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ 连续} \}$

Def：若 $W\in V$，且① $\forall\ w_1, w_2\in W$ $w_1+w_2\in W$，

② $\forall w_1\in W$，$kw_1\in W$ $\forall k\in K$

则不难验证：$(W,+,\cdot)$ 也为 K 线性空间.

eg：(1) $V=\mathbb{R}^n$ $W\subset\mathbb{R}^n$ 为课上定义的线性空间，则 W 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

(2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}\subset\mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的 $\mathbb{Q}$ 线性子空间.

线性相关性：

Def：给定 $(V,+,\cdot)$ $v_1,\cdots,v_n\in V$

称 $v_1,\cdots,v_n$ 线性无关若

$k_1v_1+\cdots+k_nv_n=0$ $k_i\in K$

$\Longrightarrow k_i=0$，$i=1,\cdots,n$.

Def：给定 $(V,+,\cdot)$，若存在 $\{v_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subset V$ s.t. $\forall\ v\in V$

v 可以唯一地表示为 $v=k_1v_{\alpha_1}\cdots k_nv_{\alpha_n}$，

则称 $\{v_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 V 的一组基. 若 $|\Lambda|<\infty$，则称 V 为 $|\Lambda|$ 维线性空间.

eg：(1) $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ $e_1,\cdots,e_n$ 为一组基 $\dim\mathbb{R}^n=n$

(2) $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\cdot)$ $e_1,e_2,e_3,\cdots$ 为 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 一组基，其是无限维的.

(3) $C[a,b]$ 是无限维的.

思考题：$(\mathbb{R},+,\cdot)$ 作为 $\mathbb{Q}$ 线性空间，维数是多少？任取其一组基，这组基的势可数吗？

Rem：由 Zorn 引理任何线性空间有一组基.

Def: 给定 V, W 两线性空间，称 $f: V \longrightarrow W$ 为线性映射.

若 $\begin{cases} f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2) \\ f(kv) = kf(v) \end{cases}$ $\forall\ v, v_1, v_2 \in V$, $k \in K$.

有限维线性空间间的线性映射：

设 $(V,+,\cdot)$ 为一 K 线性空间，$v_1, \cdots, v_n$ 为其一组基.

则 $\forall\ v \in V$，v 可以唯一表示为

$$v = k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n$$

则 V 中元素可以与 K^n 中元素一一对应.

考虑映射 $f: V \longrightarrow K^n$,
$$v \longmapsto \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},$$

易知其为线性映射，其可逆 f^{-1} 也为线性映射.

设 $V \xrightarrow{f_A} W$ 为一线性映射，取 V, W 一组基 $v_1, \cdots, v_n$，$w_1, \cdots, w_m$ 设 $f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_j$

则 $f\left(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} k_i \cdot a_{ji} w_j$.

考虑下图

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "\simeq"] & W \arrow[d, "\simeq"] \\
K^n \arrow[r, "A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}"] & K^m \\
\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \arrow[r, mapsto] & \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot a_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} k_i a_{im} \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

我们有 $f_A \longleftrightarrow A$ 一一对应