第四次习题课

一、作业中的问题及相关内容回顾

1. 最大公因子与最小公倍数

   a. $g = \gcd(m, n)$　　　$um + vn = g$

   b. 互素的定义

   c. $\operatorname{lcm}(m, n) = \dfrac{mn}{\gcd(m, n)}$.

   上次讲义中的 eg 8.

2. 素数（大课讲义 eg 7.24 的应用）

hw1：证：(1) $p=2$，$n^2-n=n(n-1)$，显然 $2 \mid n^2-n$. $\forall n \in \mathbb{Z}$ 都成立。

(2) $p \neq 2$，即 p 是奇素数，此时分两步证明结论

i) 首先用数学归纳法证明 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$，$p \mid n^p - n$.

$n=1$ 时，$n^p - n = 0$. 显然成立.

假设 $n=k$ 时，有 $p \mid k^p - k$.

当 $n=k+1$ 时，
$$(k+1)^p-(k+1) = k^p + \binom{p}{1}k^{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1}k + 1 - (k+1)$$
$$= k^p - k + \binom{p}{1}k^{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1}k$$

已知 $p \mid \binom{p}{1}$, ⋯ $p \mid \binom{p}{p-1}$

由归纳假设可知 $p \mid k^p - k$. 因此 $p \mid (k+1)^p - (k+1)$

因此，$\forall n \in \mathbb{Z}^+$，$p \mid n^p - n$.

ii) $n=0$. 显然有 $p \mid n^p - n$.

下证若 $n \in \mathbb{Z}$，$n<0$，则 $p \mid n^p - n$.

$$n^p - n = -(-n^p) - n = -\left((-n)^p + n\right) = -\left((-n)^p - (-n)\right)$$

此时 $-n \in \mathbb{Z}^+$ 由 i) 的结论可知 $p \mid (-n)^p - (-n)$. 故 $p \mid n^p - n$.

综上，$\forall n \in \mathbb{Z}$，$p \mid n^p - n$.

3、线性组合的定义

a、只有两个称"平行"

b、以$(\vec{v_1},\cdots \vec{v_k},\vec{w})$为增广矩阵的k元线性方程组相容

$\Longleftrightarrow$ $\vec{w}$是$\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$的线性组合。

hw2.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & 6 & -25 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

以$(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3},\vec{\beta})$为增广矩阵的三元线性方程组相容。

故 $\vec{\beta}=2\vec{\alpha_1}-\vec{\alpha_2}-3\vec{\alpha_3}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 & -8 \\ 7 & -5 & -6 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & -1 & -10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以$(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3},\vec{\beta})$为增广矩阵的三元线性方程组不相容。

故$\vec{\beta}$不能由$\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3}$线性表出。

4、线性相关与线性无关

a、以$(\vec{v_1},\vec{v_2},\cdots \vec{v_k})$为系数矩阵的k元齐次线性方程组有非平凡解 $\Longleftrightarrow$ $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$线性相关。

逆否命题：$\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$线性无关 $\Longleftrightarrow$ 只有平凡解.

b、要证线性无关：直观来写过程即

$\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_k\vec{v_k}=\vec{0}$ 其中 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$

反证法也可以。

hw3. 计算略 (1) 线性无关

(2) 线性相关 $\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4$

hw4. $a_1(5\alpha_1 + 2\alpha_2) + a_2(7\alpha_2 + 5\alpha_3) + a_3(7\alpha_1 - 2\alpha_3) = 0$

$\Longrightarrow (5a_1 - 7a_3)\alpha_1 + (2a_1 + 7a_2)\alpha_2 + (5a_2 - 2a_3)\alpha_3 = 0$

$\begin{cases} 5a_1 - 7a_3 = 0 \\ 2a_1 + 7a_2 = 0 \\ 5a_2 - 2a_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解. 故线性相关.

补充: 命题1:

在数域K上的线性空间V中, 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 并且

$$\begin{aligned} \beta_1 &= b_{11}\alpha_1 + \cdots + b_{s1}\alpha_s \\ &\cdots \\ \beta_s &= b_{1s}\alpha_1 + \cdots + b_{ss}\alpha_s \end{aligned} \qquad (*)$$

则向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关的充分必要条件: $\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix} \neq 0.$

想法: 设 $k_1\beta_1 + \cdots + k_s\beta_s = 0$, 则

向量组 $\beta_1, \cdots \beta_s$ 线性无关 $\Longleftrightarrow k_1 = \cdots = k_s = 0.$

证明: 设 $k_1\beta_1 + \cdots + k_s\beta_s = 0$, 把(*)代入, 得

$k_1(b_{11}\alpha_1 + \cdots + b_{s1}\alpha_s) + \cdots + k_s(b_{1s}\alpha_1 + \cdots + b_{ss}\alpha_s) = 0.$

整理得 $(k_1b_{11} + \cdots + k_sb_{1s})\alpha_1 + \cdots + (k_1b_{s1} + \cdots + k_sb_{ss})\alpha_s = 0.$

$$\begin{cases} k_1b_{11} + \cdots + k_sb_{1s} = 0 \\ \quad\cdots \\ k_1b_{s1} + \cdots + k_sb_{ss} = 0. \end{cases}$$

向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 线性无关

$\Longleftrightarrow k_1 = \cdots = k_s = 0$

$\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组只有零解

$\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组的系数矩阵行列式 $\neq 0.$

命题2.

在数域$\mathbb{R}$上的线性空间V中，设向量$\vec{\beta}$可以由向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$线性表出，则表出方式唯一的充分必要条件是向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$线性无关。

证："$\Leftarrow$" $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$线性无关. 设

$$\vec{\beta}=a_1\vec{\alpha}_1+\cdots+a_s\vec{\alpha}_s$$

$$\vec{\beta}=b_1\vec{\alpha}_1+\cdots+b_s\vec{\alpha}_s$$

两式相减：$\vec{0}=(a_1-b_1)\vec{\alpha}_1+\cdots+(a_s-b_s)\vec{\alpha}_s$

$\because$ $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$线性无关

$\therefore$ $a_1-b_1=0,\cdots,a_s-b_s=0$

即 $a_1=b_1,\cdots,a_s=b_s$. 故表示方式唯一。

"$\Rightarrow$" 设$\vec{\beta}$由向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$线性表出的方式唯一。

假如向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$线性相关，则$\mathbb{R}$中有不全为0的数$k_1,\cdots,k_s$ s.t.

$$\vec{0}=k_1\vec{\alpha}_1+\cdots+k_s\vec{\alpha}_s$$

由于$\vec{\beta}$可以由向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$线性表出，因此有

$$\vec{\beta}=a_1\vec{\alpha}_1+\cdots+a_s\vec{\alpha}_s$$

把上面两式相加

$$\vec{\beta}=(a_1+k_1)\vec{\alpha}_1+\cdots+(a_s+k_s)\vec{\alpha}_s$$

由于$k_1,\cdots,k_s$不全为0，因此

$$(a_1+k_1,\cdots,a_s+k_s)\neq(a_1,\cdots,a_s)$$

从而$\vec{\beta}$有两种不同的方式由向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$线性表出矛盾。因此向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$线性无关。

hw5. 证：设$b,b_2,\cdots b_k\in\mathbb{R}$ s.t. $b\vec{u}+b_2\vec{\alpha}_2+\cdots+b_k\vec{\alpha}_k=\vec{0}$ 下证：$b=b_1=\cdots=b_k=0$.

$\because$ $\vec{\beta}=a_1\vec{\alpha}_1+a_2\vec{\alpha}_2+\cdots+a_k\vec{\alpha}_k$ $\therefore$ $b(a_1\vec{\alpha}_1+a_2\vec{\alpha}_2+\cdots+a_k\vec{\alpha}_k)+b_2\vec{\alpha}_2+\cdots+b_k\vec{\alpha}_k=\vec{0}$

即 $a_1b\vec{\alpha}_1+(a_2b+b_2)\vec{\alpha}_2+\cdots+(a_kb+b_k)\vec{\alpha}_k=\vec{0}$.

$\because$ $\vec{\alpha}_1,\cdots\vec{\alpha}_k$线性无关

$$\therefore \begin{cases} a_1 b = 0 \\ a_2 b + b_2 = 0 \\ \cdots \\ a_k b + b_k = 0 \end{cases} \xRightarrow{a_1 \neq 0} \begin{cases} b = 0 \\ b_2 = 0 \\ \cdots \\ b_k = 0 \end{cases} \Longrightarrow \vec{\beta}, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_k \text{ 线性无关。}$$

替换定理:

eg1. 在数域K上的线性空间V中，设向量组 $\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_s$ 线性无关，向量 $\vec{\beta} = b_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + b_s\vec{\alpha}_s$，证明：如果 $b_i \neq 0$，那么用 β 替换 $\vec{\alpha}_i$ 以后得到的向量组

$$\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_{i-1}, \vec{\beta}, \vec{\alpha}_{i+1}, \cdots, \vec{\alpha}_s$$

也线性无关。

证明:

$$\vec{\alpha}_1 = 1\vec{\alpha}_1 + 0\vec{\alpha}_2 + \cdots + 0\vec{\alpha}_s$$
$$\cdots$$
$$\vec{\alpha}_{i-1} = 0\vec{\alpha}_1 + \cdots + 1\vec{\alpha}_{i-1} + \cdots + 0\vec{\alpha}_s$$
$$\vec{\beta} = b_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + b_i\vec{\alpha}_i + \cdots + b_s\vec{\alpha}_s$$
$$\vec{\alpha}_{i+1} = 0\vec{\alpha}_1 + \cdots + 1\vec{\alpha}_{i+1} + \cdots + 0\vec{\alpha}_s$$
$$\cdots$$
$$\vec{\alpha}_s = 0\vec{\alpha}_1 + \cdots + 0\vec{\alpha}_{s-1} + 1\vec{\alpha}_s$$

把下述行列式按第i行展开，得

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{i-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{i+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_s & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = b_i \neq 0$$

向量组 $\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_{i-1}, \vec{\beta}, \vec{\alpha}_{i+1}, \cdots, \vec{\alpha}_s$ 线性无关。

5. 子空间

a. 坐标(向量)空间中定义的运算：加法和数乘都封闭即可。

b. 子空间的等价命题

hw 6. 在$\mathbb{R}^2$中举例：$\mathbb{R}^2$的子空间是$\{\vec{0}\}$，$\mathbb{R}^2$，过原点的直线

[$\mathbb{R}^2$的真子空间维数只能为0, 1]

eg. $V_1=\left\{\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

$V_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix} \middle| b\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$V=\left\{\begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix} \middle| c\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

先说明 $V_1+V_2=\mathbb{R}^2$

Method 1: 显然 $V_1+V_2\subset\mathbb{R}^2$. $\forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$

其中 $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\in V_1$, $\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}\in V_2$ $\quad\therefore\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in V_1+V_2$ $\quad\mathbb{R}^2\subset V_1+V_2$

Method 2: $V_1\cap V_2=\{\vec{0}\}$ 故 $V_1+V_2=V_1\oplus V_2$

由维数公式可知 $\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)=1+1=2$

又因为 $V_1+V_2\subset\mathbb{R}^2$ 且 $\dim(V_1+V_2)=\dim(\mathbb{R}^2)=2$ $\therefore V_1+V_2=\mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l}V\cap(V_1+V_2)=V\cap\mathbb{R}^2=V=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\\ V\cap V_1+V\cap V_2=\{\vec{0}\}+\{\vec{0}\}=\{\vec{0}\}\end{array}\right\}\Longrightarrow V\cap(V_1+V_2)\neq V\cap V_1+V\cap V_2$$

(2) 当 $V_1\subset V$时证明：$V\cap(V_1+V_2)=V\cap V_1+V\cap V_2$.

证："左$\subset$右"：$\forall\vec{x}\in V\cap(V_1+V_2)$ 下证$\vec{x}\in V\cap V_1+V\cap V_2$

$\vec{x}\in V$且$\vec{x}\in V_1+V_2$，则$\exists\vec{v_1}\in V_1$, $\vec{v_2}\in V_2$, s.t. $\vec{x}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$

$\because V_1\subset V$ $\therefore\vec{v_1}\in V\Longrightarrow\vec{v_2}=\vec{x}-\vec{v_1}\in V\Rightarrow\vec{v_2}\in V\cap V_2$

由$V_1\subset V$可得$V\cap V_1=V_1$, $\therefore\vec{v_1}\in V_1=V\cap V_1$

故 $\vec{x}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$, $\vec{v_1}\in V\cap V_1$, $\vec{v_2}\in V\cap V_2$

i.e. $\vec{x}\in V\cap V_1+V\cap V_2$.

"右 $\subset$ 左": $\forall\, \vec{x}\in V\cap V_1+V\cap V_2$ 下证: $\vec{x}\in V\cap(V_1+V_2)$.

$\exists\, \vec{v_1}\in V\cap V_1$, $\vec{v_2}\in V\cap V_2$ s.t. $\vec{x}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$

$\because \vec{v_1},\vec{v_2}\in V$ $\quad\therefore \vec{x}=\vec{v_1}+\vec{v_2}\in V$

$\because \vec{v_1}\in V_1$, $\vec{v_2}\in V_2$ $\quad\therefore \vec{x}=\vec{v_1}+\vec{v_2}\in V_1+V_2$

因此 $\vec{x}\in V\cap(V_1+V_2)$

综上: $V\cap(V_1+V_2)=V\cap V_1+V\cap V_2$