1. 令 S 为非空集合，R 为 S 上的一个二元关系，证明:R 为等价关系当且仅当

   (1) $(\forall a \in S) \quad aRa$;

   (2) aRb 且 $bRc \Rightarrow cRa$.

"$A \Rightarrow B \& C$" $\Leftrightarrow$ "非B or 非C $\Rightarrow$ 非A"

$B \Rightarrow C \& C \Rightarrow B$ & "非B & 非C $\Rightarrow$ 非A"

"$\Rightarrow$" obvious.

"$\Leftarrow$" 对称：若 aRb，$\xrightarrow{(1)} bRb$

$aRb \ \& \ bRb \xrightarrow{(2)} bRa$.

传递：aRb，$bRc \xRightarrow{(2)} cRa \xRightarrow{对称} aRc$.

2. 令 S,T 为两个非空的集合，且 $|S|=m, |T|=n$ 问

   (1) S 到 T 可建立多少个映射?

   (2) S 到 T 可建立满射，单射，双射的条件各是什么? 各能建立多少个?

(1) S中每个元素有 n 种选择，故有 n^m 个

(2) 单 $m \le n$，双射 $m=n$

个数 $C_n^m \cdot m!$ $\quad n!$

$= A_n^m$

满 $m \ge n$ 记 $I = \{f: S \to T \mid f不满\}$ 记 $T=\{t_1, \cdots, t_n\}$

令 $I_i := \{f \in I \mid t_i \notin f(I)\}$ 则 $I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$

容斥原理 $|I| = \sum_{i=1}^{n} |I_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |I_i \cap I_j| + \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |I_{i_1} \cap \cdots \cap I_{i_k}| + \cdots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} I_i\right|$

$I_{i_1} \cap I_{i_2} \cap \cdots \cap I_{i_k} = \{f: S \to T \mid t_{i_1} \cdots t_{i_k} \notin f(S)\}$

$|I_{i_1} \cap I_{i_2} \cap \cdots \cap I_{i_k}| = (n-k)^m$

$\Rightarrow |I| = C_n^1 (n-1)^m - C_n^2 (n-2)^m + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^n (n-n)^m$

$\Rightarrow$ 个数 $= n^m - |I| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$

3. 设 $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad x^2 + y^2 = 1\}$,

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi] &\longrightarrow C \\ \theta &\longmapsto (cos\theta, sin\theta) \end{aligned}$$

且 $\sim_f$ 是由映射 f 诱导的等价关系. 证明

(1) $\forall \alpha \in (0, 2\pi)$, 关于 $\sim_f$ 的等价类 $\bar{\alpha} = \alpha$.

(2) $\bar{0} = \{0, 2\pi\}$.

直接验证. $\bar{\alpha} = \underbrace{f^{-1}(f(\alpha))}_{\uparrow 集合.}$

4. 证明 2 元,3 元和 4 元集分别有 2, 5 和 15 个不同的商集.

不同商集个数 = 划分个数.

2元, 3元 显然.

4元: $S = \{a, b, c, d\}$

分1组: a b c d. 1种

分2组: 2, 2分 ab | cd $\frac{C_4^2}{2} = 3$种

3, 1分 a bc | d $C_4^3 = 4$种

分3组: 2, 1, 1 ab | c | d $C_4^2 = 6$种

分4组: a | b | c | d 1种

共 $1+3+4+6+1 = 15$种

5. 画出下述偏序集的图解:

(1) $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$图见姚老师讲义

(2) 整数 24 的全体因子的集合 (偏序关系由整除给出).

Def 1: $(S, \leq)$ 为偏序集, 若 $x, y \in S$ $x \leq y$, $x \neq y$ 且 $\nexists z \in S$, $z \neq x$, $z \neq y$ s.t. $x \leq z \leq y$, 则 称 y 盖住 x. (不一定存在这样关系 eg $(\mathbb{R}, \leq)$)

Def 2: (Hass 图) 记 $Cov(S) = \{(x,y) \in S \times S \mid y$ 盖住 $x\}$. 以元素为点. 若 y 盖住 x, 则画线 $x — y$ 连接, 此图称为 $(S, \leq)$ 的 Hass 图.

6. 计算下面置换的乘积.

① $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 2 & 1 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \times \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$,

② $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \times \quad \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 2 & 1 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

①：

	π_2	$\pi_1\circ\pi_2$
1	2	6
2	3	8
3	4	2
4	5	1
5	1	3
6	7	5
7	6	4
8	8	7

$\pi_1 \times \pi_2 = \pi_1 \circ \pi_2$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 7 \end{matrix}$$

②： $\pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 8 & 3 & 2 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Rem: $\pi_2 \circ \pi_1 \neq \pi_1 \circ \pi_2$ 一般情况下.

1. 将下面的置换写成不相交的循环的乘积并确定这些置换的阶数, 奇偶性.

(1)
$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&5&6&3&1\end{pmatrix},$$

(2)
$$\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&5&7&6&8&2&1&4\end{pmatrix},$$

(3)
$$\sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\n&n-1&n-2&\cdots&2&1\end{pmatrix}.$$

(1) $\sigma_1=(1\ 2\ 4\ 6)(5\ 3)$ ord $=4$ 偶置换

(2) $\sigma_2=(1\ 3\ 7)(2\ 5\ 8\ 4\ 6)$ ord $=15$ 偶置换

(3) $\sigma_3=(1\ n)(2\ n-2)\cdots(\frac{n}{2}\ \frac{n}{2}+1)$ n偶.

$\sigma_3=(1n)(2\ n-2)\cdots(\frac{n-1}{2}\ \frac{n+3}{2})$ n奇.

$\Rightarrow n=4k$ 偶置换 $n=4k+2$ 奇 ---

$n=4k+1$ 偶--- $n=4k+3$ 奇 ---

2. 设 S_n 中置换 π 的不相交循环分解为 $\pi=\pi_1\pi_2\cdots\pi_m$, 其中 π_k 的长度为 l_k. 令
$$m^{'}=n-\sum_{k=1}^{m}l_k$$
则 π 使集合 $1,2,\cdots,n$ 中 $m^{'}$ 个元素保持不动. 证明:$\epsilon_\pi=(-1)^{n-(m+m^{'})}$.

解: $\epsilon_\pi=\epsilon_{\pi_1}\cdots\epsilon_{\pi_m}=(-1)^{l_1-1}\cdots(-1)^{l_m-1}$ $\quad \sum_{k=1}^{m}l_k=n-m'$

$=(-1)^{\sum_{i=1}^{m}l_i-m}$

$=(-1)^{n-(m+m')}$ $\square$

3. 证明：任何 S_n 中置换都可以写成至多 $n-1$ 个对换的乘积.

解：设 $\sigma \in S_n$，则 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ $\sigma_1 \cdots \sigma_k$ 互不交

$$M_{\sigma_1} = \bigcup_{i=1}^{k} M_{\sigma_i} \qquad M_{\sigma_i} \cap M_{\sigma_j} = \phi.$$

若 σ_i 长度为 l_i 则 $\sum_{i=1}^{k} l_i \le n.$

σ_i 可写为 $l_i - 1$ 个对换乘积 $\Rightarrow$ σ 可写为 $\sum_{i=1}^{k} l_i - k$ 对换.

$$\sum_{i=1}^{k} l_i - k \le n-k \le n-1. \qquad \square$$

4. 设 σ 是长度为 k 的循环, 证明: 对于任意的 $\tau \in S_n$, 置换 $\tau\sigma\tau^{-1}$ 仍是长度为 k 的循环.

解：设 $\sigma = (i_1 \cdots, i_k)$

τ 为置换 $\Rightarrow \{\tau(1), \cdots, \tau(n)\} = \{1, \cdots, n\}.$

对 若 $j = \tau(i_s)$ $1 \le s < k$

$$(\tau \sigma \tau^{-1})(j) = \tau(\sigma(\tau^{-1}(\tau(i_s))))$$
$$= \tau(\sigma(i_s)) = \tau(i_{s+1})$$

$$\tau\sigma\tau^{-1}(\tau(i_k)) = \tau(\sigma(i_k)) = \tau(i_1)$$

若 $j \notin \{i_1, \cdots, i_k\}$

$$\tau\sigma\tau^{-1}(\tau(j)) = \tau(\sigma(j)) = \tau(j)$$

$\Rightarrow$ $\tau\circ\sigma\circ\tau^{-1} = (\tau(i_1)\ \tau(i_2) \cdots \tau(i_k))$ $\square$

σ 为 k 循环 $\Rightarrow$ $\sigma^k = e.$

5. 请用扩展的欧几里得算法计算 161 与 253 的最大公因子及相应的整数 u, v 使得

$$\overset{m}{161} * u + \overset{n}{253} * v = gcd(161, 253)$$

讲义算示例:

$\underset{r_0}{161} = \underset{r_1}{253} \cdot 0 + \underset{r_2}{161}$ $\quad u_0 = 1 \quad v_0 = 0$

$i = 1$ $\quad u_1 = 0 \quad v_1 = 1$

$r_1 \neq 0 \quad i = 2 \quad q_2 = quo(r_0, r_1) = 0 \quad r_2 = rem(r_0, r_1) = 161 \quad u_2 = u_0 - q_2 u_1 = 1$

$v_2 = v_0 - q_2 v_1 = 0$

$r_2 \neq 0 \quad i = 3 \quad q_3 = quo(r_1, r_2) = 1 \quad r_3 = rem(r_1, r_2) = 92 \quad u_3 = u_1 - q_3 u_2 = -1$

$\underset{r_1}{253} = \underset{r_2}{161} \cdot 1 + 92 \quad v_3 = v_1 - q_3 v_2 = 1$

$r_3 \neq 0 \quad i = 4 \quad q_4 = quo(r_2, r_3) = 1 \quad r_4 = rem(r_2, r_3) = 69 \quad u_4 = u_2 - q_4 u_3 = 2$

$161 = 92 \cdot 1 + 69 \quad v_4 = v_2 - q_4 v_3 = -1$

$r_4 \neq 0 \quad i = 5 \quad q_5 = 1 \quad r_5 = 23 \quad u_5 = u_3 - q_5 u_4 = -3$

$92 = 69 \cdot 1 + 23 \quad v_5 = v_3 - q_5 v_4 = 2$

$r_5 \neq 0 \quad i = 6 \quad q_6 = 3 \quad r_6 = 0.$

$69 = 3 \cdot 23$

$g = r_5 = 23 \quad u = -3 \quad v = 2$

$(-3) 161 + 253 \cdot 2 = 23$

$253 = 161 + 92 \qquad 253 - 161 = 92$

$161 = 92 + 69 \qquad -253 + 2 \cdot 161 = 69$

$92 = 69 + 23 \qquad 2 \cdot 253 - 3 \cdot 161 = 23$

$69 = 3 \cdot 23$

补充：反(逆)序数与置换符号.

给定 n 个互不相同的自然数，把它们按一定次序排列起来：

$$i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_n,$$

称为该 n 个自然数的一个排列. 在上述排列中，如果有一个较大的自然数排在一个较小的自然数前面，则称为一个**反序**. 例如，2，3，5，7 这四个自然数的一个排列 7325，其中 3 在 2 前，是一个反序；7 在 2 前，是一个反序；7 在 3 前，是一个反序；7 在 5 前，也是一反序，故此排列共有 4 个反序.

一个排列中包含的反序的总数称为该排列的**反序数**. 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的反序数记做 $N(i_1i_2\cdots i_n)$. 例如我们有 $N(7325)=4$. 一个排列的反序数是奇数时，该排列称为**奇排列**；如果反序数是偶数，则称为**偶排列**. 例如，7325 是一个偶排列，而因为 $N(7235)=3$，故 7235 是一个奇排列.

引理：对正整数1…n 的一个排列 $i_1,\cdots,i_n$，互换 $i_k, i_l, k<l$ 位置，有

$$N(\cdots i_k \cdots i_l \cdots) = 1 + N(\cdots i_l \cdots i_k \cdots) \bmod 2.$$

证：①若 $l=i+1$,

$$N(\cdots i_k i_{k+1} \cdots) = N(\cdots i_{k+1} i_k \cdots)+1 \quad 若\ i_k > i_{k+1}$$

$$N(\cdots i_k i_{k+1} \cdots) = N(\cdots i_{k+1} i_k \cdots)-1 \quad 若\ i_k < i_{k+1}$$

② 若 $l=i+s$　　交换 i_{k+s}　i_{k+s-1}

$$(\cdots i_k \cdots i_{k+s-1}, i_{k+s} \cdots) \to (\cdots i_k \cdots i_{k+s}\, i_{k+s-1} \cdots)$$

相邻交换s次

$$\to (\cdots i_k \cdots i_{k+s}, i_{k+s-2}, i_{k+s-1}, \cdots) \longrightarrow \cdots$$

交换s 次 $(\cdots i_{k+s}\, i_k \cdots i_{k+s-1}\ i_{k+s+1} \cdots)$

交换 s-1 次 $(\cdots i_{k+s} \cdots i_k \cdots)$

相邻 共交换 $s+s-1$ 次

故而 $N(\cdots i_k \cdots i_{k+s} \cdots) = (2s-1) + N(\cdots i_{k+s} \cdots i_k \cdots) \bmod 2$

$= 1 + N(\cdots i_{k+s} \cdots i_k) \bmod 2$. □

命题 对任何置换 $\sigma \in S_n$，$\epsilon_\sigma = (-1)^{N(\sigma(1) \cdots \sigma(n))}$

证明：设 $\sigma = \sigma_r \cdots \sigma_1$，$\sigma_i$ 为对换.

由引理 $N(\sigma_1(1), \cdots, \sigma_1(n)) = 1 \bmod 2$

$N(\sigma_2(\sigma(1)), \cdots, \sigma_2(\sigma(n))) = 1+1 \bmod 2$

$\vdots$

$N(\sigma_r \cdots \sigma_1(1), \cdots, \sigma \cdots \sigma_1(n)) = r \bmod 2$.

$\Rightarrow \epsilon_\sigma = (-1)^r = (-1)^{N(\sigma(1) \cdots \sigma(n))}$

□

推论：任一置换分解为不同对换时，对换个数奇偶性不变.