1. 请用集合论语言来描述下述方程的解.

(1) 线性方程组 L_A 由增广矩阵 A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & -4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

确定. 计算 $\mathrm{sol}(L_A)$,

(2) 齐次线性方程组 L_B 由系数矩阵 B

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & -3 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 7 & -1 \\ 9 & -7 & 15 & 4 \end{pmatrix}$$

确定,L_B 有无非零解? 若有, 计算 $\mathrm{sol}(L_B)$.

1.(a)

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 7 & -7 & 7 & 28 \\ 0 & -7 & 7 & -7 & -28 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i.e.
$$\begin{cases} x_2 = \underset{3}{x_3} - \underset{3}{x_4} + \underset{12}{4} \\ x_1 = 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 11 = 1 + x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

$$\mathrm{sol}(L_A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1+u-2v \\ 4+u-v \\ u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

(b)

$$B \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & -1 & -7 \\ 0 & 11 & -2 & -7 \\ 0 & 38 & -12 & -14 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 14 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & -14 & 28 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

有非零解: $x_3 = 2x_4$　$x_2 = -3x_3 + 7x_4 = x_4$　$x_1 = 5x_2 - 3x_3 - 2x_2 = -3x_4$

$$\mathrm{sol}(L_B) = \left\{ \begin{pmatrix} -3u \\ u \\ 2u \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; u \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. 验证

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},\quad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Def：设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 为一 $n\times n$ 矩阵，则我们归纳定义 $\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\cdot a_{1i}\cdot\det(A_{1i})$．其中 A_{1i} 为 A 去掉第一行第 i 列后 $(n-1)\times(n-1)$ 阶矩阵 $\begin{bmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$．常记为 $\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(a)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}\cdot a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0 - a\begin{vmatrix} -a & c \\ -b & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} -a & 0 \\ -b & -c \end{vmatrix}$$

$$= 0 - abc + bac = 0.$$

Bonus problem: ①设 A 为 $n\times n$ 方阵，记号如上．令 $d: M_{n\times n}\longrightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C},k)$

$$d(A)=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$ 其中 σ 为 $\{1,\cdots,n\}$ 的置换．

$\operatorname{sgn}\sigma=\begin{cases} 0 & \sigma\text{为偶置换}. \\ 1 & \sigma\text{为奇置换}. \end{cases}$　求证：$d(A)=\det(A)$．(数学归纳法)

② 证明：$\det(A)=\det(A^t)$．A^t 为 A 的转置．

3. 证明如下结论.

(1) 如果 X 是有限集，且变换 $f: X \longrightarrow X$ 是单射, 则 f 是双射,

(2) 设映射 $f: X \longrightarrow Y$ 且 $V \subset Y$. 试求证:$f(f^{-1}(V)) \subset V$ 且 f 为满射当且仅当对 Y 中的任意子集 V 满足 $f(f^{-1}(V)) = V$,

(3) 设 $f: X \longrightarrow Y$ 是一个映射，且 S, T 都是 X 的子集. 证明
$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$,$f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T)$.
(思考: 是否可以举例说明后面一个式子不可以取等号.)

(1) M1. 设 $f(X)=\{x\in X \mid \exists y\in X \text{ s.t. } x=f(y)\}$ 为 f 的像.

$f(X)\subset X. \Rightarrow \#f(X) \leq \#X.$

f 单 $\quad \#f(X)\geq \#X \Rightarrow \#f(X)=\#X$. X 有限 $\Rightarrow X=f(X) \Rightarrow f$ 满.

M2: $\forall x\in X$, 考虑 $f^0(x)=x, f(x), f^2(x), f^3(x) \ldots \exists\, n\neq m$ s.t. $f^n(x)=f^m(x)$

WLOG, $n>m$, f 单 $\Rightarrow f^{n-m}(x)=x \Rightarrow f(f^{n-m-1}(x))=x \Rightarrow f$ 满.

(2) ① $\forall\ y\in f(f^{-1}(V))\ \exists\ x\in f^{-1}(V)$ s.t. $y=f(x)$.

$\Downarrow$

$f(x)=y\in V \Rightarrow f(f^{-1}(V))\subset V.$

② "$\Rightarrow$" 由(1) $f(f^{-1}(V))\subset V$. 需证 $V\subset f(f^{-1}(V))$

$\forall y\in V$, f 满, $\Rightarrow \exists\, x\in X$ s.t. $f(x)=y\in V$.

$\Rightarrow x\in f^{-1}(V)$

$\Rightarrow y=f(x)\in f(f^{-1}(V)) \Rightarrow V=f(f^{-1}(V))$

"$\Leftarrow$" $f(f^{-1}(Y))=Y \Rightarrow f$ surj.

(3) ① $\begin{matrix} S\subset T\cup S \\ T\subset \end{matrix} \Rightarrow f(S)\subseteq f(T\cup S) \Rightarrow f(S)\cup f(T)\subset f(T\cup S)$
$\qquad\qquad f(T) \subset$

$\forall\ y\in f(S\cup T)\ \ y=f(x)\ \ x\in S$ or $T \Rightarrow y\in f(S)$ or $f(T)$.

② $\begin{matrix} S\cap T\subset S \\ S\cap T\subset T\end{matrix} \Rightarrow f(S\cap T)\subset f(S) \Rightarrow f(S\cap T)\subset f(S)\cap f(T)$
$\qquad\qquad\qquad \subset f(T)$

取 $S=\{0,1\}, T=\{1,2\}\subset\{0,1,2\}=X \qquad Y=X.$

f: $0\longmapsto 2$, $1\longmapsto 1$, $2\longmapsto 2$ $\qquad S\cap T=\{1\}$ $\qquad f(S\cap T)=f(\{1\})=\{1\}$

$f(S)=\{1,2\}\quad f(T)=\{1,2\}$

$f(S)\cap f(T)=\{1,2\}\neq f(S\cap T)$ □

4. 集合 S 的全体子集的集合记作

$$\mathcal{P}(S) = \{T \mid T \in S\}.$$

若 S 含有 n 个元素 $(n < \infty)$, 则集合 $\mathcal{P}$ 的基数是多少?

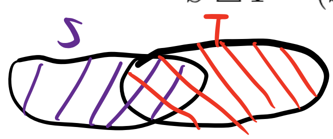
2^n个. 设 $1 --- n$ 表示 n个元素

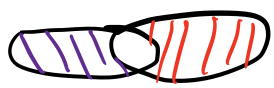
设 $A = \{(a_1, ---, a_n) \mid a_i = 0 \text{ or } 1\}$

$A \longleftrightarrow P(S)$ 一一对应.

5. 符号 $S \triangle T$ 表示两个集合的 S 和 T 对称差:$S \triangle T = (S \setminus T) \cup (T \setminus S)$.
证明:

$$S \triangle T = (S \cup T) \setminus (S \cap T).$$





$S\Delta T$

"$\subset$" $\forall x \in S\Delta T$ $x \in (S\setminus T)\cup(T\setminus S) \Rightarrow x \in S\cup T$.

若 $x \in S\setminus T$ $x \notin T$ $\Rightarrow x \notin T\cap S$

若 $x \in T\setminus S$ $x \notin S$ $x \notin T\cap S$

$\Rightarrow S\Delta T \subset (S\cup T)\setminus(S\cap T)$

"$\supset$" $\forall x \in (S\cup T)\setminus(S\cap T) \Rightarrow x \in S$ or $x \in T$.

$x \in S$, $x \notin S\cap T \Rightarrow x \in S$ $x \notin T \Rightarrow x \in S\setminus T$.

若 $x \in T$ ———

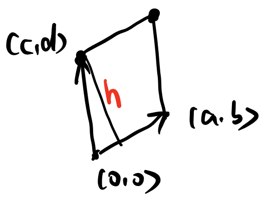
$\Rightarrow (S\cup T)\setminus(S\cap T) \subset S\Delta T$

$\hookrightarrow S\Delta T = (S\cup T)\setminus(S\cap T)$.

一些补充.

① 行列式几何意义. "有向"体积.

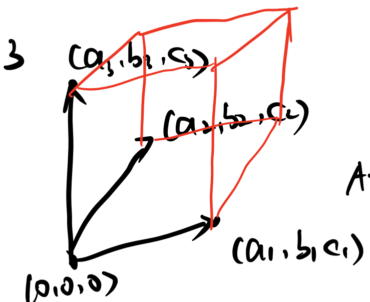
• $n=2$ $\quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ $\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}$.



$$h=\frac{|ad-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$S_{\square}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left|\frac{ad-bc}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = |ac+bd|.$$

• $n=3$



$\det A=$ 平行6面体"有向"体积

试验证

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

• $n\geq 4$ $\quad$ 高维区域的有向体积

② 集合的势.

• (Cantor-Bernstein) 若 $\exists\ \varphi: A\hookrightarrow B$ 单, $\psi: B\hookrightarrow A$ 单. 则 A与B之间存在一一映射. i.e. $\mathrm{Card}(A)\leq\mathrm{Card}(B)$ & $\mathrm{Card}(B)\leq\mathrm{Card}(A)$ $\Rightarrow \mathrm{Card}(A)=\mathrm{Card}(B)$

解: 令

$$\begin{aligned}
&A_0=\psi(B) && B_0=\varphi(A)\\
&A_1=A\setminus A_0 && B_1=\varphi(A_1)\\
&A_2=\psi(B_2) && B_2=\varphi(A_2)\\
&\ \ \vdots && \\
&A_{n+1}=\psi(B_n) && B_{n+1}=\varphi(A_{n+1})
\end{aligned}$$

$\boxed{\varphi,\psi \text{ inj} \rightsquigarrow \{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \{B_n\}_{n=1}^{\infty}}$ $\begin{matrix}A_i\\B_i\end{matrix}$ 互不相交. ———

(练习).

$A_i \xrightarrow{\varphi|_{A_i}} B_i$ 双射 $i\geq 1$

$\Rightarrow \quad \varphi: \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ 双射

由ψ. $\psi: B\to A_0$ 双射.

$$\Rightarrow \quad B\Big\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i \xrightarrow{\psi} A_0\Big\backslash\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{k+1} = A_0\Big\backslash\bigcup_{n=2}^{\infty}A_n \quad \text{bij}$$

$A_1=A\setminus A_0 \Rightarrow A_0=A\setminus A_1$

i.e. $\quad B\Big\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i \xrightarrow{\psi} A\Big\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \quad \text{bij}$

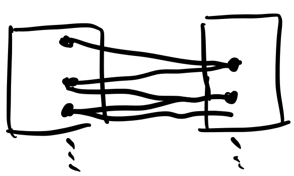
$$\Rightarrow A=\underbrace{\Big(A-\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)}\cup\underbrace{\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)} \qquad \underbrace{\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\Big)}\cup\underbrace{\Big(B-\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\Big)}=B$$

φ - bij

ψ bij

□

另一种证法

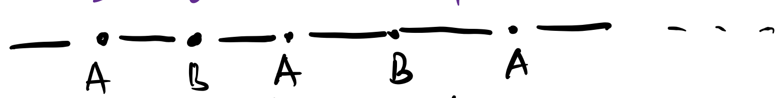


$\forall a\in A$ 有序列

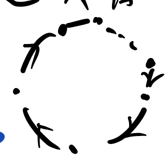
$\cdots\ a,\ \varphi(a),\ \psi(\varphi(a)),\ \varphi(\psi\varphi(a)),\ \cdots$

$\in A \quad \in B \quad \in A \quad B$

可能可以往前延伸



$\forall b\in B$ 同理, 链共有 3 种可能.

①  loop.

② A or B $\bullet\to\bullet\to\bullet\to\bullet\ \cdots$ 右无限.

③ $\cdots\to\bullet\to\bullet\to\bullet\ \cdots$ 均无限.

A, B 中每个元素都会出现在某个链中, 且仅出现一次, 这给出 A, B 一个双射.
更详细解释见百度百科词条:"康托尔一伯恩施坦定理" 可视化.

• 应用 1) 可数无限 可数.
2) $\mathbb{Q}$ 可数.
3) $\bigcup_{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ 可数.

$$\mathbb{Q}=\left\{\begin{matrix} \cdots & -\frac{1}{1} & 0 & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \cdots \\ \cdots & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \cdots \\ \cdots & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \cdots \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\ a_{41} & a_{42} & & & & \\ a_{51} & & & & & \end{array} \qquad S \hookrightarrow \mathbb{N}$$

- $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(S)) \neq \mathrm{Card}(S)$

Pf: 反证 若存在 $\varphi: S \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ 双射.

取 $S_0 \subset S$, $S_0 = \{ s \in S \mid s \notin \varphi(s) \}$ $S_0 \in \mathcal{P}(S)$

断言不存在 $s \in S$ s.t. $\varphi(s) = S_0$.

若 $\exists\, \varphi(s) = S_0$

$s \in S_0 \Rightarrow s \notin \varphi(s) = S_0$ ↯.

$s \notin S_0 \Rightarrow s \in \varphi(s) = S_0$ ↯

与 φ 是满射矛盾.

$\square$.