第一次习题课

一、作业中需要注意的问题

1. 判定线性方程组的相容：（用讲义中 Thm 2.5 即用初等变换化为阶梯型）.

L
- 相容
  - 确定
  - 不确定
- 不相容

2. 数学归纳法的基本步骤

1) 当 $n=1$ 时，结论成立.

2) 假设 $n=k-1$ 时，结论成立.

当 $n=k$ 时，（一般利用假设来证明 $n=k$ 时结论成立）.

最后，综合1)，2).

注：强调讲义中 eg 1.4.

二、系统补充数学归纳法

Peano 公理：任何自然数构成的非空集合一定有最小元。

（讲完线性序会有更直观的理解.）

第一数学归纳法原理：

对于每个 $n\in\mathbb{N}$，存在某个命题 $P(n)$，如果下面两条成立：

1) $P(1)$ 成立

2) 对给定任意的 $m\in\mathbb{N}$，由 $P(m)$ 成立总能推出 $P(m+1)$ 成立.

则对所有的 $n\in\mathbb{N}$，$P(n)$ 成立。 注：作业中的4、5均可用第一数学归纳法。

第二数学归纳法原理：（完全数学归纳法）.

对于每个 $n\in\mathbb{N}$，存在某个命题 $P(n)$，若以下两条成立：

1) $P(1)$ 成立.

2) 对给定任意的 $m\in\mathbb{N}$，由 $P(k)$ 对所有 $k\le m$ 成立可推出 $P(m+1)$ 成立，

则对所有 $n\in\mathbb{N}$，$P(n)$ 成立。

eg1. 对每个$n\in\mathbb{N}$有 $a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)[a^{2n}+(-1)a^{2n-1}b+(-1)^2a^{2n-2}b^2$
$+\cdots+(-1)^{2n}b^{2n}]$

$$=(a+b)\left(\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i b^i a^{2n-i}\right) \quad (*).$$

证明：1) 当$n=1$时，$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

2) 对给定$m\in\mathbb{N}$，假设上式对所有$k\le m$成立，即

$$a^{2k+1}+b^{2k+1}=(a+b)\left(\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i a^{2k-i}b^i\right)$$

当$n=m+1$时，

$$a^{2(m+1)+1}+b^{2(m+1)+1}=a^{2m+3}+b^{2m+3}$$
$$=(a^2+b^2)(a^{2m+1}+b^{2m+1})-(a^{2m+1}b^2+a^2b^{2m+1})$$

$$=(a^2+b^2)\left(\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i a^{2m-i}b^i\right)-a^2b^2\left(a^{2(m-1)+1}+b^{2(m-1)+1}\right)$$
$$=(a^2+b^2)(a+b)\left(\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i a^{2m-i}b^i\right)-a^2b^2\left(\sum_{i=0}^{2(m-1)}(-1)^i a^{2(m-1)-i}b^i\right)(a+b)$$
$$=(a+b)\left[\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i a^{2(m+1)-i}b^i+\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i a^{2m-i}b^{i+2}-\sum_{i=0}^{2(m-1)}(-1)^i a^{2m-i}b^{i+2}\right]$$
$$=(a+b)\left[\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i a^{2(m+1)-i}b^i+(-1)^{2m-1}ab^{2m+1}+(-1)^{2m}b^{2(m+1)}\right]$$

故对$n=m+1$也成立。

由第二数学归纳法，$(*)$式对$\forall n\in\mathbb{N}$都成立。 □

注：运用数学归纳法时，(1)和(2)的验证缺一不可：

1) 归纳基础$(n=1)$不可忽略。

反例：所有自然数都相等，即$\forall n\in\mathbb{N}$. $n=n+1$. $P(k)$: $k=k+1$

假设$P(k)$成立，即$k=k+1$ 则两边都加1，有$k+1=k+2$.

我们不能用数学归纳法说明此伪命题：

因为$k=1$时 $P(1)$不成立！

2> 归纳假设也不可缺失

反例："$2^{2^n}+1$ 是素数"是伪命题

$n=0, 1, 2, 3, 4$ 时，相应的值 3, 5, 17, 257, 65537 是素数

但我们不能断定对 $\forall n\in\mathbb{N}$，$2^{2^n}+1$ 是素数.

$2^{2^5}+1$ 不是素数.

3> 数学归纳法的本质是人们认识客观法则的方法之一：

先从个数的例子中摸索出规律来，再从理论上来证明这一规律的一般性。

4> 数学归纳法除第一、二归纳法外还有多种变形，如

一'：1> $p(k)$ 成立

2> $\forall m\geq k$，$p(m)$ 成立 $\Rightarrow p(m+1)$ 成立

三. 排列与组合

有一个盒子装有 n 个球，分别标号为 $1,\cdots,n$，每次取 r 个，按照一定的顺序排成一列，称做从 n 个元素里每次取出 r 个元素的排列。排列的个数称为排列数，记 A_n^r. 注：$A_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}$

从 n 个不同元素里，每次取出 r 个，不管怎样的顺序并成一组，称做从 n 个元素里每次取出 r 个元素的组合。组合的种数，称做组合数，记作：

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

性质：1> $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$，特别地，我们规定 $\binom{n}{0}=1$，$\binom{n}{k}=0$ 对 $k<0$ 或 $k>n$ 成立。

2> $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}$ 帕斯卡定理

作业第5题：

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{n}$$

a^kb^{n-k} 即选取 k 个 a，$(n-k)$ 个 b 相乘的种数 $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

推论：1) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

（证明：令 $a=b=1$，则 $(1+1)^n=2^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$）

特别地，我们指出 $\binom{n}{k}$ 恰为 n 元集合的所有 k 元子集的个数，

记 $P(\{s_1,\cdots,s_n\})$ 为集合 $\{s_1,\cdots,s_n\}$ 所有子集的个数，则

$\operatorname{card}(P\{s_1,\cdots,s_n\})=\binom{n}{0}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

2) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

证明：令 $a=1$，$b=-1$ 则 $(1-1)^n=0$.

eg2：证明对任意 $n\in\mathbb{N}$，当 $0\le k\le n$ 时有

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1} \quad (*)$$

证明：(1) 当 $n=1$ 时，分 $k=0$ 或 1 两种情况

1) $k=0$ 时，左边 $=\binom{0}{0}+\binom{1}{0}=1+1=2=\binom{2}{1}$ =右边

2) $k=1$ 时，左边 $=\binom{1}{1}=1=\binom{1+1}{1+1}$ = 右边.

(2) 假设(*)对 $n=m$ 成立，即当 $0\le k\le m$ 时 $\sum_{i=k}^{m}\binom{i}{k}=\binom{m+1}{k+1}$

考虑 $n=m+1$ 的情形，分两类情况讨论：

1) $0\le k\le m$ 时 $\quad$ 左 $=\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{m}{k}+\binom{m+1}{k}$

$$=\binom{m+1}{k+1}+\binom{m+1}{k}=\binom{m+2}{k+1}=\text{右}$$

2) $k=m+1$ 时，左 $=\binom{m+1}{m+1}=1=\binom{(m+1)+1}{(m+1)+1}$ = 右.

故对 $0\le k\le m+1$ 时 $\sum_{i=k}^{m+1}\binom{i}{k}=\binom{m+2}{k+1}$

由数学归纳法，(*)对任意 $n\in\mathbb{N}$ 成立。 □

eg 3. 给定圆周上任意 n 个点，确定由 $\binom{n}{2}$ 条弦划分的圆内区域数 R_n.

此处我们假设任意三条弦在圆内不相交。

试证明: $R_n=1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$

证明：(1) 当 $n=1$ 时 $R_1=1=1+\binom{1}{2}+\binom{1}{4}$

(2) 假设 $R_n=1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$，考虑 R_{n+1}. 这时我们需要建立 R_n 与 R_{n+1} 的关系. 注意到在 $(i,n+1)$ 连线上与其它弦交点个数加1为 $(i,n+1)$ 这条弦增加的区域数.

所以我们有递归公式

$$R_{n+1}=R_n+\sum_{i=1}^{n}\left[(i-1)(n-i)+1\right]$$

$$=1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+n\cdot\frac{n(n-1)}{2}-\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=1+\binom{n+1}{2}+\binom{n}{4}+\frac{n(n^2+1)}{2}-\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$=1+\binom{n+1}{2}+\binom{n}{4}+\frac{n(n^2+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

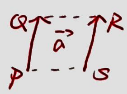
$$=1+\binom{n+1}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{3}$$

$$=1+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{4}$$

所以由数学归纳法 $R_n=1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$ 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 成立。 $\square$.

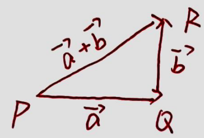
四. 向量的线性运算

我们用有向线段来表示向量. 长度相等且方向相同的两个有向线段表示同一个向量或称这两个向量相等. 如图 $\overrightarrow{PQ}=\vec{a}=\overrightarrow{SR}$



Def 1: 设 $\vec{a},\vec{b}$ 是向量, 在空间任取一点 P 作 $\overrightarrow{PQ}=\vec{a}$, $\overrightarrow{QR}=\vec{b}$

称以 P 为始点, R 为终点的有向线段 $\overrightarrow{PR}$ 所表示的向量为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和 记为 $\vec{a}+\vec{b}$. 称此运算为向量的加法。



Def 2: 长度为0的向量叫做零向量 记作0 它没有确定的方向. 规定可根据需要取任意方向.

Def 3: 与向量$\vec{b}$等长而方向相反的向量称为$\vec{b}$的负向量 记作$-\vec{b}$. 显然 $-(-\vec{b})=\vec{b}$.

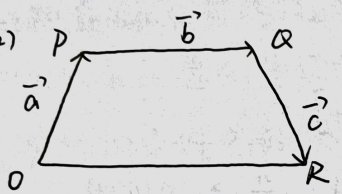
Def 4. 定义向量的减法为 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

Thm 1: 向量的加法满足如下性质. 对任意向量$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$有

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　　2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

3) $\vec{a}+0=\vec{a}$　　4) $\vec{a}+(-\vec{a})=0$.

证: (2)



$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{OQ}+\vec{QR}=\vec{OR}=\vec{OP}+\vec{PR}$$
$$=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

Def 5: 设k为实数 $\vec{a}$为向量 定义k与$\vec{a}$的乘积是一个向量 记作$k\vec{a}$
其长度为$|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$ 其方向$k>0$时与$\vec{a}$相同. $k<0$时与$\vec{a}$相反。
此运算为向量的数量乘法。

注: $0\cdot\vec{a}=0=k\cdot 0$　　$k\vec{a}=0 \Longleftrightarrow k=0$ or $\vec{a}=0$.

Thm 2. 对任意实数k, l和任意向量$\vec{a}$有

1) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

2) $k(l\cdot\vec{a})=(kl)\vec{a}$

注: 长度为1的向量叫做单位向量 若$\vec{a}\neq 0$ 则
$\vec{a}^{\circ}:=|\vec{a}|^{-1}\vec{a}$ 为与$\vec{a}$同向的单位向量 称$\vec{a}^{\circ}$为$\vec{a}$的单位化.
若$\vec{b}$与另一$\vec{a}$同向(或反向)的向量 则 $\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\vec{a}^{\circ}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}^{\circ}$ (或 $-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}^{\circ}$)

Thm3 对任意实数k, l和任意向量$\vec{a}$, $\vec{b}$有

1) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

2) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

Def 6. 我们将空间中全体向量组成的集合记为E^3。向量的加法和数乘运算统称为E^3的线性运算。

Def 7. 设$\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_n}$是一组向量 $k_1, \cdots, k_n$是一组实数 则$k_1\vec{a_1}+\cdots+k_n\vec{a_n}$为一个向量. 称它为向量组$\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_n}$的一个线性组合. 如果向量$\vec{b}$等于向量组$\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_n}$的一个线性组合. 也称向量$\vec{b}$可由向量组$\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_n}$线性表出。

Def 8. 将一个向量的始点移到某一直线(或平面)上。如果它的终点也位于此直线(或平面)上, 那么就称该向量与该直线(或平面)平行. 平行于同一直线(或平面)的一组向量称为共线(或共面)的.

注 1. 零向量与任意向量共线

2. 共线的向量组共面

3. 两个向量总是共面的

4. $k\vec{a}$与$\vec{a}$共线 $(k\in\mathbb{R})$

5. $\vec{a}, \vec{b}$不共线 $k, l\in\mathbb{R}$ 则$k\vec{a}+l\vec{b}$与$\vec{a}, \vec{b}$共面

6. 一个非零向量通过数乘可以得到与之共线的所有向量.

Thm 4. $\vec{a}\neq 0$. $\vec{a}, \vec{b}$共线 则存在唯一的实数k s.t $\vec{b}=k\vec{a}$.

Thm 5. $\vec{a}, \vec{b}$不共线. $\vec{c}$与$\vec{a}, \vec{b}$共面 则有唯一实数k, l, s.t. $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$.

Thm 6. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$不共面, 对于空间任意向量$\vec{d}$存在唯一的一组实数$k, l, m$ s.t

$$\vec{d}=k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}.$$

Thm 6 留作思考题证一下.

推论1: $\vec{a}, \vec{b}$共线 $\Longleftrightarrow$ $\exists$不全为零的实数 $k\vec{a}+l\vec{b}=0$.

推论2: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$共面 $\Longleftrightarrow$ $\exists$不全为零的实数k, l, m s.t. $k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}=0$

Def 9 空间中任意三个不共面的向量$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$构成的有序组称为一个基 记作$(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. 对于空间中任意向量$\vec{v}$ 若$\vec{v}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3}$ 则称有序三元数组(x, y, z)为$\vec{v}$在基$(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$下的坐标。

取定基$(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ 设向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的坐标分别为(a_1, a_2, a_3)和(b_1, b_2, b_3)

$$\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_i=b_i \quad (i=1, 2, 3).$$

Def 10. 三元实数组的相等. 加法与数乘运算定义如下:

$$(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) \Longleftrightarrow x_i = y_i \quad i=1,2,3.$$

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3).$$

$$k(x_1, x_2, x_3) = (kx_1, kx_2, kx_3) \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$E^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} \longmapsto (x, y, z)$$

向量的和、数乘分别对应坐标的和、数乘

即向量的线性运算对应于坐标的线性运算.

前面的定理对三元数组也成立, 所以也称 $\mathbb{R}^3$ 中的元素为向量.

Thm 7. 向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线 $\Longleftrightarrow$ $\exists$ 不全为零的数 k, l s.t. $k(a_1, a_2, a_3) + l(b_1, b_2, b_3) = 0$.

因此向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线的充要条件为对应坐标成比例 即 $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$.

Thm 8. 向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面 $\Longleftrightarrow$ $\exists$ 不全为零的数 k, l, m

s.t. $k(a_1, a_2, a_3) + l(b_1, b_2, b_3) + m(c_1, c_2, c_3) = 0$.

因此向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充要条件为下列三元一次方程组有非零解

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0. \end{cases}$$