1. $f' = 3x^2 - 3$；利用辗转相除法可得，$\gcd(f, f') = x - 1$

$$\frac{f}{\gcd(f,f')} = \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} = x^2 + x - 2.$$

故 f 的无平方部分为 x^2+x-2.

2. 设 $\sigma \in S_n$，$\pi: R \to R[x_1, \cdots, x_n]$ 是嵌入（满足 $\forall r \in R$，$\pi(r) = r$），定义

$$\begin{aligned} \pi_\sigma: R[x_1, \cdots, x_n] &\to R[x_1, \cdots, x_n] \\ x_i &\mapsto x_{\sigma(i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

且 $\pi_\sigma|_R = \pi$. 由赋值同态定理（定理5.15）可知其为环同态.

从而 $\pi_\sigma(\varphi(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)) = \varphi(\pi_\sigma(\varepsilon_1), \cdots, \pi_\sigma(\varepsilon_n))$ （π_σ 是环同态）

$= \varphi(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ （$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是对称多项式）

注：$\varphi(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ 是关于 $x_1, \cdots, x_n$ 的对称多项式

3. 证明：$|z_1+z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1+z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$.

$= z_1\cdot\bar{z}_1 + \cancel{z_1\bar{z}_2} + \cancel{z_2\bar{z}_1} + z_2\cdot\bar{z}_2 + z_1\cdot\bar{z}_1 - \cancel{z_1\bar{z}_2} - \cancel{z_2\bar{z}_1} + z_2\bar{z}_2$

$= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$

几何意义：平行四边形四边长度的平方和等于两对角线长度的平方和.

4. 证明：(i) $\forall z = x + \sqrt{-1}y$，有 $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$，$y = \dfrac{z - \bar{z}}{2\sqrt{-1}}$，将其代入到 $Ax+By+C=0$ 中得.

$$A\cdot\frac{z+\bar{z}}{2} + B\cdot\frac{z-\bar{z}}{2\sqrt{-1}} + C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{A - \sqrt{-1}B}{2}\cdot z + \frac{A+\sqrt{-1}B}{2}\bar{z} + C = 0.$$

令 $a = \dfrac{A+\sqrt{-1}B}{2} \neq 0$，$c = -C \in R$，则 $a\bar{z} + \bar{a}z = c$.

(ii) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2+y^2 - 2ax - 2by + a^2+b^2-r^2 = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 - 2a\cdot\frac{z+\bar{z}}{2} - 2b\cdot\frac{z-\bar{z}}{2\sqrt{-1}} + a^2+b^2-r^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z}}{4} + \frac{-z^2-\bar{z}^2+2z\bar{z}}{4} + (-a+b\sqrt{-1})z + (-a-\sqrt{-1}b)\bar{z} + a^2+b^2-r^2 = 0$$

$$z\bar{z} + (-a-\sqrt{-1}b)\bar{z} + (-a+\sqrt{-1}b)z + a^2+b^2-r^2 = 0$$

令 $A = 1 \in R$，$\beta = -a - \sqrt{-1}\cdot b \in \mathbb{C}$，$C = a^2+b^2-r^2 \in R$ 则

$A z\bar{z} + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + C = 0$，其中 $A \neq 0$，A, C 为实数，$\beta \in \mathbb{C}$ 且 $|\beta|^2 > AC$.

5.证明:

令 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_0^{n-1} & \varepsilon_1^{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_0^{-1} & \varepsilon_1^{-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_0^{-(n-1)} & \varepsilon_1^{-(n-1)} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{-(n-1)} \end{pmatrix}$

$C=A\cdot B=(C_{ij})_{n\times n}$. A的第i行为 $(\varepsilon_0^{i-1}\ \varepsilon_1^{i-1}\ \cdots\ \varepsilon_{n-1}^{i-1})$, B的第j列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_{j-1}^{-1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{j-1}^{-(n-1)} \end{pmatrix}$

$$C_{ij}=\varepsilon_0^{i-1}+\varepsilon_1^{i-1}\varepsilon_{j-1}^{-1}+\cdots+\varepsilon_{n-1}^{i-1}\varepsilon_{j-1}^{-(n-1)}=\varepsilon_0^{i-1}+\varepsilon_1^{i-1}\varepsilon_1^{-(j-1)}+\cdots+\varepsilon_1^{(i-1)(n-1)}\varepsilon_1^{-(n-1)(j-1)}$$

$$=1+\varepsilon_1^{i-j}+\cdots+\varepsilon_1^{(i-j)(n-1)}.$$

① $i=j$, $C_{ii}=1+1+\cdots+1=n$.

② $i\neq j$ $C_{ij}=\dfrac{1\cdot(1-(\varepsilon_1^{i-j})^n)}{1-\varepsilon_1^{i-j}}=\dfrac{1-(\varepsilon_1^n)^{i-j}}{1-\varepsilon_1^{i-j}}=\dfrac{1-1}{1-\varepsilon_1^{i-j}}=0$ $\Rightarrow AB=nE$

对称多项式的基本定理

6.(i)证明: $f=\underbrace{ax_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}}_{hm(f)}+$ 次数较低的项

head monomial $\leftarrow hm(f)$.

$g=\underbrace{bx_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}}_{hm(g)}+$ 次数较低的项.

f·g的每个单项式都是形如 $cx_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\cdot dx_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}=cdx_1^{i_1+j_1}\cdots x_n^{i_n+j_n}$

(除 $hm(f)\cdot hm(g)$ 这一项)

考虑下列序列

$$(k_1+l_1)-(i_1+j_1),(k_2+l_2)-(i_2+j_2),\cdots,(k_n+l_n)-(i_n+j_n). \quad (1)$$

由于下列序列

$k_1-i_1, k_2-i_2,\cdots,k_n-i_n$;

$l_1-j_1, l_2-j_2,\cdots,l_n-j_n$.

自左至右第一个非零的数为正，故序列(1)自左至右第一个非零的数也为正.

故 $hm(fg)=hm(f)\cdot hm(g)$

(ii) $hm(\sigma_1^{i_1})=x_1^{i_1}$

$hm(\sigma_2^{i_2})=x_1^{i_2}x_2^{i_2}$

$\vdots$

$hm(\sigma_n^{i_n})=x_1^{i_n}x_2^{i_n}\cdots x_n^{i_n}$.

$$\Rightarrow hm(a\sigma_1^{i_1}\cdots\sigma_n^{i_n})=hm(\sigma_1^{i_1})hm(\sigma_2^{i_2}\cdots\sigma_n^{i_n})=hm(\sigma_1^{i_1})hm(\sigma_2^{i_2})hm(\sigma_3^{i_3}\cdots\sigma_n^{i_n})=\cdots$$

$$=hm(\sigma_1^{i_1})hm(\sigma_2^{i_2})hm(\sigma_3^{i_3})\cdots hm(\sigma_n^{i_n})$$

$$=x_1^{i_1}x_1^{i_2}x_2^{i_2}\cdots x_1^{i_n}x_2^{i_n}\cdots x_n^{i_n}$$

$$=x_1^{i_1+i_2+\cdots+i_n}x_2^{i_2+\cdots+i_n}\cdots x_n^{i_n}$$

(iii) 证明：$f \neq g \iff (i_1, \cdots, i_n) \neq (j_1, \cdots, j_n)$

对 $\forall \sigma \in S_n$，$f_\sigma = x_{\sigma(1)}^{i_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{i_n}$，$g_\sigma = x_{\sigma(1)}^{j_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{j_n}$

再次由 $(i_1, i_2, \cdots, i_n) \neq (j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 可得 $f_\sigma \neq g_\sigma$

(iv) 证明：设 $f \in R[x_1, \cdots, x_n] \setminus 0$，则存在唯一的 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in R\setminus\{0\}$ 和 $M_1, \cdots, M_k \in X$，使得

$$f = \alpha_1 M_1 + \cdots + \alpha_k M_k \quad \leftarrow \text{f的分布式}$$

设 $\sigma \in S_n$，由于 $f_\sigma = f$，故 $x_{\sigma(1)}^{i_1} x_{\sigma(2)}^{i_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{i_n}$ 出现在 f 的分布式中，并且不高于 $hm(f)$。

由 σ 的任意性可知 $i_1 \geq \max(i_2, \cdots, i_n)$。

否则 $\exists \tau \in S_n$，$hm(f_\tau) \succ hm(f)$，这与 f 的对称性矛盾。

同理可证

$$i_j \geq \max(i_{j+1}, \cdots, i_n), \quad j = 2, 3, \cdots, n-1$$

从而 $i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_n$

(v) 我们不妨设 f 是 d 齐次的，令 （齐次分解）$(f = h_d + h_{d-1} + \cdots + h_0)$

$$hm(f) = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}, \quad \text{这里 } i_1 + i_2 + \cdots + i_n = d.$$

且该项对应的系数是 $a_0 \in R\setminus\{0\}$。令

$$p_0 = x_1^{i_1 - i_2} x_2^{i_2 - i_3} \cdots x_{n-1}^{i_{n-1} - i_n} x_n^{i_n}$$

由(iv)知，$p_0 \in R[x_1, \cdots, x_n]$。再由(ii)知

$$hm(p_0(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)) = x_1^{i_1 - i_2 + i_2 - i_3 + \cdots + i_{n-1} - i_n + i_n} \cdots x_n^{i_n} = hm(f)$$

容易看出，$p_0(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ 是关于 $x_1, \cdots, x_n$ 对称的齐 d 次多项式，且其首项系数为 1。

故 $f - a_0 p_0$ 仍是对称的齐 d 次多项式，但 $hm(f - a_0 p_0) \prec hm(f)$。

对 $f - a_0 p_0$ 重复上述操作，我们必然能在有限步得到 0。

① $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ 与 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 一一对应，并且 $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = d$ 的取法不超过 d^n 个，即次数为 d 的单项式只有有限个；

② 每次操作，序降低

综上所述，存在 $a_0, a_1, \cdots, a_l \in R$，$p_1, \cdots, p_l \in R[x_1, \cdots, x_n]$，使得

$$f = a_0 p_0(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) + a_1 p_1(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) + \cdots + a_l p_l(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$$

令 $\varphi = a_0 p_0 + a_1 p_1 + \cdots + a_l p_l$，即为所求。

(Vi). 若存在 φ, φ' 满足 $f(x_1,\dots,x_n)=\varphi(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=\varphi'(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$，

但 $\varphi(x_1,\dots,x_n)\neq\varphi'(x_1,\dots,x_n)$.

令 $g=\varphi(x_1,\dots,x_n)-\varphi'(x_1,\dots,x_n)$，则 $g\neq 0$. 设 g 的分布式表示为

$$g=\beta_1 N_1+\dots+\beta_s N_s.$$

其中 $\beta_1,\dots,\beta_s\in R\setminus\{0\}$，$N_1,\dots,N_s$ 是关于 $y_1,\dots,y_n$ 的单项式，两两不同，则

$$0=g(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=\beta_1 N_1(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)+\dots+\beta_s N_s(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n).$$

由(ii)可知 $N_1(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),\dots,N_s(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ 的 S 个首项两两不同.

于是它们中序最高的首项不可能被消去，故推出矛盾. 故 $g=0$，φ 唯一.

claim: 若 $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}\neq x_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$，则 $hm(\varepsilon_1^{i_1}\cdots\varepsilon_n^{i_n})\neq hm(\varepsilon_1^{j_1}\varepsilon_2^{j_2}\cdots\varepsilon_n^{j_n})$.

Pf: $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}\neq x_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}\Leftrightarrow(i_1,i_2,\dots,i_n)\neq(j_1,j_2,\dots,j_n)$.

$$hm(\varepsilon_1^{i_1}\cdots\varepsilon_n^{i_n})=x_1^{i_1+i_2+\dots+i_n}\,x_2^{i_2+\dots+i_n}\cdots x_n^{i_n}=A$$

$$hm(\varepsilon_1^{j_1}\cdots\varepsilon_n^{j_n})=x_1^{j_1+j_2+\dots+j_n}\,x_2^{j_2+\dots+j_n}\cdots x_n^{j_n}=B$$

由 $(i_1,i_2,\dots,i_n)\neq(j_1,\dots,j_n)$，从右往左数，设 k 为最大的角标使得

$i_n=j_n,\ i_{n-1}=j_{n-1},\ \dots,\ i_{k+1}=j_{k+1},\ i_k\neq j_k$.

$\Rightarrow i_n+i_{n-1}+\dots+i_k\neq j_n+j_{n-1}+\dots+j_{k+1}+j_k$.

故 A 与 B 对应的 x_k 处的幂次不同，从而 $A\neq B$.

隔板法求单项式的个数. $X_n:=\{x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}\mid i_1,i_2,\dots,i_n\in\mathbb{N}\}$.

设 $d\in\mathbb{N}$. 求 X_n 中次数不高于 d 次的单项式的个数.

解：当 $n=1$ 时，共 $d+1$ 个 $(1,x_1,x_1^2,\dots,x_1^d)$

当 $n=2$ 时，$x_1^i x_2^j$，$i+j\le d$. 且 $i,j\in\mathbb{N}$.

$i+j=0$　1

$i+j=1$　2

$\vdots$

$i+j=d$　$d+1$

i 确定之后，j 唯一确定下来，共有 $1+2+\dots+d+1=\dfrac{(1+d+1)(d+1)}{2}=\dfrac{(d+1)(d+2)}{2}$

……

一般情况.

$i_1+i_2+\cdots+i_n \le d$, $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$.

$\Leftrightarrow \underline{\underline{i_0}}+i_1+i_2+\cdots+i_n=d$, $i_0, i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$.

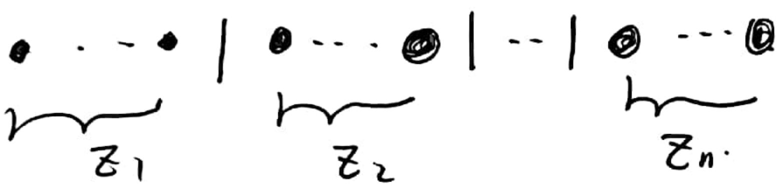
$$\Leftrightarrow \underset{j_0}{\underset{\parallel}{(i_0+1)}}+\underset{j_1}{\underset{\parallel}{(i_1+1)}}+\underset{j_2}{\underset{\parallel}{(i_2+1)}}+\cdots+\underset{j_n}{\underset{\parallel}{(i_n+1)}}=d+n+1, \quad i_i$$

$\Leftrightarrow j_0+j_1+j_2+\cdots+j_n=d+n+1$, $j_0, \ldots, j_n \in \mathbb{N}_+$

从而次数小于等于d的单项式的个数等于方程

$$z_0+z_1+\cdots+z_n=d+n+1$$

的正整数解.



组合解释：$d+n+1$ 个球，分成 $n+1$ 份，一共的分法数.

$d+n+1$个球有n个"|"，$d+n$个空隙，故总数为

$$\binom{n+d}{n}.$$