# 中国科学院大学线性代数(下)第六次作业题
## 主讲老师: 李子明
## 助教: 杜昊, 张秉宇

---

1. 验证下列映射为线性映射并求出在标准基下的矩阵表示和秩：

$$\begin{aligned}\phi_1: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\phi_2: \quad M_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \quad M_2(\mathbb{R}) \\ X &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X\end{aligned}$$

注：$\mathbb{R}^3$ 的标准基为 $(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (0,0,1)^t$; $M_2(\mathbb{R})$ 的标准基为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 设 $\phi : P_3 \longrightarrow P_3$ 在 $\{1, x, x^2\}$ 下的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求 $\phi$ 在 $\{3x^2+2x+1, x^2+3x+2, 2x^2+x+3\}$ 下的矩阵表示。

3. 证明：

$$\begin{aligned}\phi: \quad P_n &\longrightarrow \quad P_n \\ p(x) &\mapsto p(x+1) - p(x)\end{aligned}$$

是线性映射并求 $\operatorname{rank}(\phi)$ 和 $\ker(\phi)$。（注：$P_n := \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) < n\}$）

4. 柯斯特利金-第二卷 第56页: 5, 6, 7.