中国科学院大学线性代数 (下) 第十二次作业题
主讲老师: 李子明
助教: 杜昊, 张秉宇

---

1. 席南华第二册: p65, 6, 14.

2. 已知如下矩阵 A, 求 A^k, $k \geq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 已知如下矩阵 $A \in M_4(\mathbb{R})$, 其中所有的参数都是实数. 已知 A 有一个特征值 2, 且对应的几何重数 (即对应的特征子空间的维数) 为 3. 求证 A 可对角化.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ a & 0 & b & c \\ d & e & 0 & f \\ g & h & k & 4 \end{pmatrix}$$

4. 设有下列复矩阵, 其中 $a_0, a_1, ...a_{n-1} \in \mathbb{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

求证:

1) A 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化.

2) (选做题) 假设 $B \in M_n(\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化, 则存在 $a_0, a_1, ...a_{n-1} \in \mathbb{C}$ 使得 B 相似于如上的 A.

5. 设 $A \in M_n(F)$ 是 F 上一个可对角化矩阵. 考虑线性变换

$$\begin{aligned} \varphi_A : & M_n(F) \to M_n(F) \\ & X \mapsto AX \end{aligned}$$

求证 φ_A 可对角化.