中国科学: 数学　2014 年　第 44 卷　第 3 期: 211 ∼ 220
link.springer.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
优秀博士学位论文专栏

微分周形式与稀疏微分结式

李伟

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190
E-mail: liwei@mmrc.iss.ac.cn

指导教师: 高小山　中国科学院数学与系统科学研究院

收稿日期: 2013-07-19; 接受日期: 2013-07-31
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (批准号: 2011CB302400) 和国家自然科学基金 (批准号: 60821002) 资助项目, 本学位论文荣获 "2013 年中国科学院优秀博士学位论文"

摘要　代数周 (Chow) 形式和代数结式是代数几何的基本概念, 同时还是消去理论的强大工具. 一个自然的想法是在微分代数几何中发展相应的周形式和结式理论. 但是由于微分结构的复杂性, 在本文的研究工作之前, 微分结式只有部分结果, 而微分周形式与稀疏微分结式理论一直没有得到发展. 本文的主要结果包括: 第一, 发展一般 (generic) 情形的微分相交理论, 作为应用, 证明一般情形的微分维数猜想. 第二, 初步建立微分周形式理论. 对不可约微分代数簇定义微分周形式并证明其基本性质, 特别地, 给出微分周形式的 Poisson 分解公式, 引入微分代数簇的主微分次数这一不变量并证明一类微分代数闭链的周簇和周坐标的存在性. 作为应用, 首次严格定义微分结式, 证明其基本性质. 第三, 初步建立稀疏微分结式理论. 引入 Laurent 微分本性系统的概念, 定义稀疏微分结式, 证明其基本性质, 特别地, 引入微分环面簇的概念, 给出稀疏微分结式阶数和次数界的估计, 并基于此给出计算稀疏微分结式的单指数时间算法.

关键词　微分周形式　微分周簇　微分相交理论　稀疏微分结式　Laurent 微分本性系统

MSC (2010) 主题分类　12H05, 14C05

1　引言

本文是作者的博士学位论文 [1] 的一个简要介绍. 由于篇幅限制, 本文略去所有证明, 有兴趣的读者可参见原论文. 文中关于微分周形式的主要结果最早发表于文献 [2,3], 而关于稀疏微分结式的主要结果可参见文献 [4,5], 其中文献 [4] 在 2011 年 ISSAC (International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation) 国际会议上荣获国际计算机协会 (ACM) 符号与代数计算专业委员会颁发的唯一 "ISSAC 杰出论文奖". 在完成博士论文之后, 我们又将稀疏结式理论推广到差分情形, 具体可参见文献 [6].

周形式是代数几何的一个基本概念. 20 世纪 30 年代, Chow 和 van der Waerden [7] 建立了代数周形式理论, 之后, 周形式及其与之相关的周坐标、周簇和周环成为代数几何的重要工具 [7,8]. 近年来, 周形式也已成为消去理论的强大工具, 并在数学研究与算法设计方面都有着重要的应用. 例如, Wu [9] 通过周形式对有任意奇点的代数簇定义了陈省身示性类与示性数; Nesterenko [10] 和 Philippon [11] 以

英文引用格式: Li W. Differential Chow form and sparse differential resultant (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 211–220, doi: 10.1360/012013-151

周形式作为基本工具在超越数论中取得了一些深刻的结果; Brownawell [12] 通过发展周形式的进一步性质证明了有效 Hilbert 零点定理的最优界, 从而在消去理论中取得了突破性的成果. 在周形式的高效算法研究方面, Eisenbud 等人[13] 通过外代数给出了周形式的一个新的表达式, 并用这个表达式在很多新的情形下给出了明确的公式; Jeronimo 等人[14] 给出了计算周形式的一个有界概率算法.

代数结式是代数几何与代数消元理论中的另一个基本概念, 其在数学、计算机辅助几何设计、计算机图形学、机器人、计算机视觉、计算几何和工程学等领域都具有广泛的应用. 近 20 年来, 结式理论的一个重大研究进展是稀疏结式的引入, 它是经典多元结式的推广. Gel'fand 等人[15] 在研究广义超几何函数理论时引入了稀疏结式, Sturmfels[16] 给出了稀疏结式存在的充要条件并证明了稀疏结式的很多基本性质. 在算法研究方面, 文献 [17,18] 证明了稀疏结式是一个 Macaulay 型矩阵行列式的因子, 并且给出了基于矩阵表示的计算稀疏结式的高效算法. 类似于多元结式, D'Andrea [19] 进一步证明了稀疏结式是两个 Macaulay 型矩阵行列式的商. 在应用研究方面, 稀疏结式被广泛应用到物理、编码理论、代数统计和几何建模等领域, 并取得了一些重要进展.

代数几何的研究对象是代数方程组的解集, 而微分代数几何主要研究微分代数方程组的解集. 众所周知, 微分代数方程在众多的学科领域中都起着极其重要的作用. 20 世纪 30 年代, 美国数学家 Ritt 受 van der Waerden 和 Noether 的影响用代数方法研究微分方程零点, 其著作 [20] 奠定了微分代数的基础. 而后在此基础上, Kolchin 发展了以交换代数和现代代数几何为基础的微分代数几何. 微分代数几何与很多数学学科, 如解析函数论、单群论、数学物理、数理逻辑和丢番图几何等, 都有着紧密的联系.

鉴于周形式与结式在代数几何的理论与算法层面都起着非常重要的作用并且在很多领域都有应用, 因此在微分代数几何中发展相应的周形式与结式理论是很有价值的. 但是由于微分结构的复杂性, 在我们的研究工作之前, 微分结式只有部分结果, 甚至微分结式的严格定义一直未能给出, 而微分周形式与稀疏微分结式理论一直没有得到发展.

2 预备知识

假设 $\mathcal{F}$ 是一个特征为零的常微分域, 其中的微分算子记为 δ. 假设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{F}$ 的泛微分域. 对每个元素 $e\in\mathcal{E}$, 令 $e^{(k)}=\delta^k(e)$, $e^{[k]}=\{e^{(i)}:i=0,\ldots,k\}$.

设 $\mathbb{Y}=\{y_1,\ldots,y_n\}$ 为 $\mathcal{E}$ 上的一组微分未定元, 令 $\Theta(\mathbb{Y})=\{(y_i^{(k)})_{1\leqslant i\leqslant n;k\geqslant 0}\}$. 称 $\mathcal{F}\{\mathbb{Y}\}=\mathcal{F}[\Theta(\mathbb{Y})]$ 为 $\mathcal{F}$ 上的微分多项式环. 设 f 是 $\mathcal{F}\{\mathbb{Y}\}$ 中的一个微分多项式, 则 $\mathrm{ord}(f,y_i)=\max\{k:\deg(f,y_i^{(k)})>0\}$, $\mathrm{ord}(f)=\max_i\mathrm{ord}(f,y_i)$. 称 $\Theta(\mathbb{Y})$ 上的二元关系 $\mathscr{R}$ 为 $\mathbb{Y}$ 上的一个微分序, 如果 $\mathscr{R}$ 是全序并与微分算子相容. 在微分序 $\mathscr{R}$ 下, f 中有效出现的 $\Theta(\mathbb{Y})$ 中序最高的元素称为 f 的主项, 记为 $\mathrm{ld}(f)$. 将 f 视为关于其主项的单变元多项式, 则其首项系数称为 f 的初式, f 关于 $\mathrm{ld}(f)$ 的偏导数称为 f 的隔离子.

设 $\mathrm{ld}(f)=y_i^{(k)}$. 称 $g\in\mathcal{F}\{\mathbb{Y}\}$ 关于 f 是约化的, 如果 $\mathrm{ord}(g,y_i)<k$, 或者 $\mathrm{ord}(g,y_i)=k$ 且 $\deg(g,y_i^{(k)})<\deg(f,y_i^{(k)})$. 称 $\mathcal{A}=A_1,\ldots,A_m$ 是微分自约化集, 若 A_i 关于 $A_j\,(\forall\, i,j\neq i)$ 都是约化的. 微分多项式集合 $\mathcal{S}$ 中的一个自约化集 $\mathcal{A}$ 称为 $\mathcal{S}$ 的特征列, 如果 $\mathcal{S}$ 中不含有关于 $\mathcal{A}$ 约化的非零元素. 若 $\mathcal{A}$ 是微分素理想 $\mathcal{I}$ 的微分特征列, 则 $\mathcal{I}=\mathrm{sat}(\mathcal{A})=[\mathcal{A}]:\mathrm{H}_{\mathcal{A}}^{\infty}$, 其中 $\mathrm{H}_{\mathcal{A}}^{\infty}$ 是由 $\mathcal{A}$ 中所有元素的初式和隔离子生成的乘法闭集.

设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{F}\{\mathbb{Y}\}$ 中的一个微分素理想, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 是 $\mathcal{I}$ 的一个母点, 则 $\mathcal{I}$ 的微分维数定义为微分域 $\mathcal{F}\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle$ 在 $\mathcal{F}$ 上的微分超越度, 即 $\dim(\mathcal{I})=\mathrm{d.tr.deg}\,\mathcal{F}\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle/\mathcal{F}$ (参见文献 [21]). 从特征列的角度来看, 若 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{I}$ 在某种序下的微分特征列, 则 $\dim(\mathcal{I})=n-|\mathcal{A}|$. 对所有充分大的 $t\in\mathbb{N}$, $\mathcal{I}$

的微分维数多项式 $\omega_{\mathcal{I}}(t) = \mathrm{tr.deg}\,\mathcal{F}(\xi_1^{[t]},\ldots,\xi_n^{[t]})/\mathcal{F} = (t+1)\dim(\mathcal{I}) + h$. 称 h 为 $\mathcal{I}$ 的阶数, 记为 $\mathrm{ord}(\mathcal{I}) = h$. 微分维数和阶数是微分素理想最重要的两个不变量, 它们刻画了微分素理想的零点集 (即其所对应的不可约微分簇) 的结构.

设 ξ 和 η 是 $\mathcal{E}^n$ 中的两个点. 称 η 为 ξ 在 $\mathcal{F}$ 上的微分特定化, 如果 $\forall f \in \mathcal{F}\{\mathbb{Y}\}, f(\xi) = 0 \Rightarrow f(\eta) = 0$. 设 $\mathbb{U}$ 是 $\mathcal{F}$ 上的一组微分未定元. 称 η 微分独立于 $\mathcal{F}\langle\mathbb{U}\rangle$, 如果 $\mathbb{U}$ 在 $\mathcal{F}\langle\eta\rangle$ 上微分代数无关. 以下定理给出了微分特定化的一个重要性质, 这一性质同时也是发展微分相交理论与微分周形式的重要工具.

定理 1　设 $P_i(\mathbb{U},\mathbb{Y}) \in \mathcal{F}\{\mathbb{U},\mathbb{Y}\}$ $(i=1,\ldots,m)$, 其中 $\mathbb{U} = (u_1,\ldots,u_r) \subset \mathcal{E}$ 在 $\mathcal{F}$ 上微分代数无关. 设 $\overline{\mathbb{Y}} = (\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_n) \in \mathcal{E}^n$ 是一个微分独立于 $\mathcal{F}\langle\mathbb{U}\rangle$ 的点. 如果 $P_i(\mathbb{U},\overline{\mathbb{Y}})$ $(i=1,\ldots,m)$ 在 $\mathcal{F}\langle\mathbb{U}\rangle$ 上微分代数相关, 则对 $\mathbb{U}$ 在 $\mathcal{F}$ 上的任意微分特定化 $\overline{\mathbb{U}} \in \mathcal{F}^r$, $P_i(\overline{\mathbb{U}},\overline{\mathbb{Y}})\,(i=1,\ldots,m)$ 在 $\mathcal{F}$ 上微分代数相关.

3　一般微分多项式系统的相交理论

相交理论是代数几何中的一个基本问题, 其中的相交定理断言: 若 V 和 W 是 n 维仿射空间中的两个维数分别为 r 和 s 的不可约代数簇且 $V \cap W \neq \emptyset$, 则 $V \cap W$ 的每一个不可约分支的维数不小于 $r+s-n$. 但在微分代数几何中, 该相交定理不成立, Ritt [22, 第 133 页] 给出了如下的反例:

例 2　令 $n=3$, V 是 $y_1^5 - y_2^5 + y_3(y_1y_2' - y_2y_1')^2 \in \mathbb{C}\{y_1,y_2,y_3\}$ 的主分支, $W = \mathbb{V}(y_3)$. 显然, V 和 W 均为微分维数为 2 的不可约微分簇. 但是, $V \cap W = \{(0,0,0)\}$ 的微分维数为 0.

定义 3　设 $\mathbf{m}_{s,r}$ 是 $\mathcal{F}\{\mathbb{Y}\}$ 中所有阶数 $\leqslant s$ 和次数 $\leqslant r$ 的微分单项式构成的集合, $\mathbb{U} = \{u_m\}_{m\in\mathbf{m}_{s,r}} \subset \mathcal{E}$ 是一组在 $\mathcal{F}$ 上微分代数无关的元素. 则我们称

$$f = \sum_{m\in\mathbf{m}_{s,r}} u_m m$$

为一个阶数为 s 次数为 r 的一般微分多项式, 其中 u_m 都是 f 的系数. 由 f 定义的微分簇称为一个一般微分超曲面. 当 $s=0, r=1$ 时, 称 $f=0$ 为一般微分超平面.

我们有如下的一般微分相交定理 (详细证明参见文献 [1]):

定理 4　设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{F}\{y_1,\ldots,y_n\}$ 中的一个微分维数为 d 阶数为 h 的微分素理想, f 是一个阶数为 s 次数大于零的一般微分多项式, $\mathbf{u}_f$ 是 f 的系数向量. 如果 $d>0$, 则 $\mathcal{I}_1 = [\mathcal{I}, f] \subset \mathcal{F}\langle\mathbf{u}_f\rangle\{y_1,\ldots,y_n\}$ 是一个微分维数为 $d-1$ 阶数为 $h+s$ 的微分素理想. 如果 $d=0$, 则 $\mathcal{I}_1 = \mathcal{F}\langle\mathbf{u}_f\rangle\{y_1,\ldots,y_n\}$.

当 f 是一般微分超平面时, 我们有以下推论, 它是建立微分周形式理论的基础, 同时结论本身也是非常有趣的, 而与之相对应的代数结论通常列为代数几何教科书中的一个定理 [15, 第 54 和 110 页].

推论 5　设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{F}\{\mathbb{Y}\}$ 中的一个微分素理想, 其微分维数为 $d>0$. 设 $\{u_0,u_1,\ldots,u_n\} \subset \mathcal{E}$ 是一组在 $\mathcal{F}$ 上微分代数无关的元素集合, 则 $\mathcal{I}_1 = [\mathcal{I}, u_0 + u_1y_1 + \cdots + u_ny_n]$ 是 $\mathcal{F}\langle u_0,u_1,\ldots,u_n\rangle\{\mathbb{Y}\}$ 中的一个微分维数为 $d-1$ 阶数为 h 的微分素理想.

由于代数相交定理在微分情形不成立, Ritt 在其经典著作中提出了关于微分相交理论的一个较弱的结果, 即微分维数猜想: 设 $F_1,\ldots,F_r$ 是 $\mathcal{F}\{y_1,\ldots,y_n\}$ 中的微分多项式, 其中 $r<n$. 如果 $\mathbb{V}(F_1,\ldots,F_r) \neq \emptyset$, 则其每一个不可约分支的微分维数 $\geqslant n-r$ (参见文献 [22, 第 178 页]). Ritt 证明了 $r=1$ 时该猜想成立, 但对任意情形, 微分维数猜想至今仍然是一个悬而未决的问题. 作为定理 4 的一个直接应用, 我们可以证明一般情形的微分维数猜想.

定理 6 设 $f_1,\dots,f_r\,(r\leqslant n)$ 是一组微分无关的一般微分多项式集合, 其中 f_i 的阶数为 s_i, 则 $[f_1,\dots,f_r]$ 是 $\mathcal{F}\langle\mathbf{u}_{f_1},\dots,\mathbf{u}_{f_r}\rangle$ 上的一个微分维数为 $n-r$ 阶数为 $\sum_{i=1}^r s_i$ 的微分素理想.

4 微分周形式

首先, 给出微分周形式的定义与基本性质. 进一步, 引入微分代数闭链的概念, 并对一类特殊的微分代数闭链证明微分周簇的存在性. 最后, 定义广义微分周形式, 作为应用, 给出微分结式的严格定义与基本性质.

4.1 不可约微分簇的微分周形式

假设 $V\subset\mathcal{E}^n$ 是一个定义在微分域 $\mathcal{F}$ 上的微分维数为 d 的不可约微分代数簇,

$$\mathbb{L}_i=u_{i0}+u_{i1}y_1+\cdots+u_{in}y_n,\quad i=0,1,\dots,d$$

是 $d+1$ 个一般超平面. 令 $\mathcal{I}=\mathbb{I}(V)\subset\mathcal{F}\{\mathbb{Y}\}$, $\mathbf{u}_i=(u_{i0},u_{i1},\dots,u_{in})\ (i=0,\dots,d)$. 则由推论 5, $\mathcal{I}_{\mathbf{u}}=[\mathcal{I},\mathbb{L}_0,\dots,\mathbb{L}_d]\cap\mathcal{F}\{\mathbf{u}_0,\dots,\mathbf{u}_d\}$ 是一个余维数为 1 的微分素理想. 故存在不可约微分多项式 $F(\mathbf{u}_0,\dots,\mathbf{u}_d)\in\mathcal{F}\{\mathbf{u}_0,\dots,\mathbf{u}_d\}$, 使得 $\{F\}$ 是 $\mathcal{I}_{\mathbf{u}}$ 在任意微分序下的特征列, 即

$$[\mathcal{I},\mathbb{L}_0,\dots,\mathbb{L}_d]\cap\mathcal{F}\{\mathbf{u}_0,\dots,\mathbf{u}_d\}=\mathrm{sat}(F).\tag{4.1}$$

定义 7 (4.1) 中所定义的微分多项式 $F(\mathbf{u}_0,\dots,\mathbf{u}_d)$ 称为 V 或者 $\mathbb{I}(V)$ 的微分周形式.

微分周形式具有与代数周形式类似的如下性质:

定理 8 设 V 是 $\mathcal{F}$ 上的一个微分维数为 d 阶数为 h 的不可约微分代数簇, $F(\mathbf{u}_0,\dots,\mathbf{u}_d)\in\mathcal{F}\{\mathbf{u}_0,\dots,\mathbf{u}_d\}$ 是 V 的微分周形式, 则 $F(\mathbf{u}_0,\dots,\mathbf{u}_d)$ 具有以下性质:

(1) $F(\mathbf{u}_0,\dots,\mathbf{u}_d)$ 关于每组微分变量 $\mathbf{u}_i$ 都是微分齐次的, 并且微分齐次次数相等. 进一步, 对于在 F 中实际出现的所有 u_{ij}, $\mathrm{ord}(F,u_{ij})=h$.

(2) $F(\mathbf{u}_0,\dots,\mathbf{u}_d)$ 可以唯一地分解成如下形式:

$$\begin{aligned}F(\mathbf{u}_0,\dots,\mathbf{u}_d)&=A(\mathbf{u}_0,\dots,\mathbf{u}_d)\prod_{\tau=1}^{g}\left(u_{00}^{(h)}+\sum_{\rho=1}^{n}u_{0\rho}^{(h)}\xi_{\tau\rho}+t_\tau\right)\\&=A(\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d)\prod_{\tau=1}^{g}\left(u_{00}+\sum_{\rho=1}^{n}u_{0\rho}\xi_{\tau\rho}\right)^{(h)},\end{aligned}$$

这里 $g=\deg(F,u_{00}^{(h)})$, $\xi_{\tau\rho}$ 是 $\mathcal{F}$ 的微分扩域 $\mathcal{F}_\tau$ 中的元素, $(u_{00}+\sum_{\rho=1}^n u_{0\rho}\xi_{\tau\rho})^{(h)}$ 是 $(u_{00}+\sum_{\rho=1}^n u_{0\rho}\xi_{\tau\rho})$ 的 h 阶导数. 第一个 “$=$” 是将 $F(\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d)$ 视为关于 $u_{00}^{(h)},u_{01}^{(h)},\dots,u_{0n}^{(h)}$ 的代数多项式作因式分解得到的, 而第二个 “$=$” 是微分表达式.

(3) $\Xi_\tau=(\xi_{\tau1},\dots,\xi_{\tau n})\ (\tau=1,\dots,g)$ 是 V 的母点. 并且, 这些点还是 V 与一般微分超平面 $\mathbb{P}_\sigma=0\ (\sigma=1,\dots,d)$ 以及代数超平面 ${}^a\mathbb{P}_0^{(l)}=0\ \ (l=0,\dots,h-1)$ 的所有交点.

(4) 假设 $\mathbf{v}_i\subset\mathcal{F}$ 是 $\mathbf{u}_i\ (i=0,\dots,d)$ 在 $\mathcal{F}$ 上的微分特定化, $\overline{\mathbb{P}}_i\ (i=0,\dots,d)$ 是在 $\mathbb{P}_i$ 中用 $\mathbf{v}_i$ 替换 $\mathbf{u}_i$ 得到的微分多项式. 如果 $\overline{\mathbb{P}}_i=0\ (i=0,\dots,d)$ 与 V 相交, 则 $F(\mathbf{v}_0,\dots,\mathbf{v}_d)=0$. 进一步, 如果 $F(\mathbf{v}_0,\dots,\mathbf{v}_d)=0$ 并且 $S_F(\mathbf{v}_0,\dots,\mathbf{v}_d)\neq0$, 则 $d+1$ 个微分超平面 $\overline{\mathbb{P}}_i=0\ (i=0,\dots,d)$ 必定与 V 相交, 这里 $S_F=\frac{\partial F}{\partial u_{00}^{(h)}}$.

定理 8 中的 g 称为 V 的主微分次数. 该定理结论 (3) 给出了首微分次数 g 的几何意义, 即 g 是 V 与微分超平面 $\mathbb{P}_\sigma = 0\,(\sigma = 1, \ldots, d)$ 以及代数超平面 ${}^a\mathbb{P}_0^{(l)} = 0$ $(l = 0, \ldots, h-1)$ 全部交点的个数. 因此, 首微分次数满足代数簇次数的类似性质.

4.2 微分代数闭链的微分周簇

微分簇 V 称为齐阶的, 如果 V 的每一个不可约分支都具有相同的微分维数和阶数. 设 V 是一个微分维数为 d 阶数为 h 的齐阶微分簇, $V = \bigcup_{i=1}^{l} V_i$ 是 V 的不可约分解, $F_i(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d)$ 是 V_i 的微分周形式. 设

$$F(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d) = \prod_{i=1}^{l} F_i(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d)^{s_i}, \tag{4.2}$$

其中 s_i 是任意的非负整数. 结合 (4.2), 我们将代数闭链[15] 这一概念推广到了微分情形.

定义 9 称 $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{l} s_i \mathbf{V}_i$ 为一个微分代数闭链 (differential algebraic cycle), 这里的 s_i 是 $\mathbf{V}_i$ 在 $\mathbf{V}$ 中的重数.

n 维微分仿射空间中的一个微分维数为 d、阶数为 h、主微分次数为 g 和微分次数为 m 的微分代数闭链称为具有指标 (n, d, h, g, m). 为定义微分周簇, 使得微分周簇中的每一个点都唯一地表示一个指标为 (n, d, h, g, m) 微分代数闭链, 我们首先给出了一个微分多项式 $F(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d)$ 成为一个齐阶微分簇或者微分代数闭链的微分周形式的充分条件, 即如下的定理:

定理 10 设 $F(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_d)$ 是 $\mathcal{F}\{\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_d\}$ 中的一个微分多项式, 其中 $\mathbf{u}_i = (u_{i0}, \ldots, u_{in})$ $(i = 0, \ldots, d)$. 若 F 满足定理 8(1)–(4), 则 F 是某个 d 维 h 阶微分代数闭链的微分周形式.

定义 11 微分簇 $\mathbb{CV}$ 称为指标为 (n, d, h, g, m) 的微分周簇, 如果 $\bar{a}_i \in \mathbb{CV} \Leftrightarrow$ 存在某个指标为 (n, d, h, g, m) 的微分代数闭链 $\mathbf{V}$, 使得 $\bar{a}_i$ 是 $\mathbf{V}$ 的微分周形式的系数. 此时, 称 $\bar{a}_i$ 是 $\mathbf{V}$ 的微分周坐标.

定理 12 指标为 $(n, d, h, 1, m)$ 的微分周簇是存在的.

对 $g > 1$ 的情形, 我们目前尚不能证明微分周簇的存在性. 其主要困难在于对一个由微分方程和代数方程组成的混合系统目前还没有混合消元算法.

4.3 广义微分周形式与微分结式

当 5.1 节中的 $\mathbb{L}_i$ 是 $d+1$ 个一般微分超曲面时, 类似地可以定义广义微分周形式. 我们证明了广义微分周形式具有与微分周形式类似的性质. 进一步, 作为广义微分周形式的应用, 我们首次给出微分结式的严格定义:

定义 13 设 $\mathbb{P}_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ 是关于 n 个微分变量 $y_1, \ldots, y_n$ 的一般微分多项式, 其系数向量分别为 $\mathbf{u}_i$. 由定理 3, 存在不可约微分多项式 $\mathbf{R}(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_n)$ 使得 $[\mathbb{P}_0, \ldots, \mathbb{P}_n] \cap \mathbb{Q}\{\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_n\} = \mathrm{sat}(\mathbf{R})$, 称 $\mathbf{R}(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_n)$ 为 $\mathbb{P}_0, \ldots, \mathbb{P}_n$ 的微分结式.

定理 14 设 $\mathbb{P}_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ 是 $n+1$ 个一般微分多项式, 其阶数分别为 s_i, 次数为 m_i, 系数向量为 $\mathbf{u}_i$, 其中零次项为 u_{i0}, 则 $\mathbb{P}_0, \ldots, \mathbb{P}_n$ 的微分结式 $\mathbf{R}(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_n)$ 具有如下性质:

(1) $\mathbf{R}(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_n)$ 关于每组 $\mathbf{u}_i$ 都是微分齐次的, 并且其关于 $\mathbf{u}_i$ 的阶数分别为 $h_i = s - s_i$ $(i = 0, \ldots, n)$, 其中 $s = \sum_{l=0}^{n} s_l$.

(2) 存在 $\mathcal{F}$ 的微分扩域 $\mathcal{F}_\tau$ $(\tau = 1, \ldots, t_0)$ 中的元素 $\xi_{\tau\rho}$ $(\rho = 1, \ldots, n)$ 使得

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_n) = A(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_n) \prod_{\tau=1}^{t_0} \mathbb{P}_0(\xi_{\tau1}, \ldots, \xi_{\tau n})^{(h_0)},$$

并且 $(\xi_{\tau 1},\ldots,\xi_{\tau n})$ $(\tau=1,\ldots,t_0)$ 是零维微分素理想 $[\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_n]$ 的母点, 其中 A 是关于 $\mathbf{u}_i$ $(i=0,\ldots,n)$ 的微分多项式, $\mathbb{P}_0(\xi_{\tau 1},\ldots,\xi_{\tau n})^{(h_0)}$ 是 $\mathbb{P}_0(\xi_{\tau 1},\ldots,\xi_{\tau n})$ 的 h_0 阶导数, $t_0=\deg(R,u_{00}^{(h_0)})$.

(3) 微分结式可以表示成 $\mathbb{P}_i$ 及其各阶直到 $s-s_i$ $(i=0,\ldots,n)$ 阶导数的线性组合. 准确地讲,

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_n)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{s-s_i}h_{ij}\mathbb{P}_i^{(j)}.$$

在上述表达式中, $h_{ij}\in\mathcal{F}\langle\mathbf{u}\rangle[y_1,\ldots,y_n,\ldots,y_1^{(s)},\ldots,y_n^{(s)}]$ 的次数不高于 $(sn+n)^2D^{sn+n}+D(sn+n)$, 这里 $\mathbf{u}=\bigcup_{i=0}^{n}\mathbf{u}_i\setminus\{u_{i0}\}$, $D=\max\{m_0,m_1,\ldots,m_n\}$.

(4) 假设 $\mathbf{u}_i\,(i=0,\ldots,n)$ 微分特定化到 $\mathcal{F}$ 中的具体元素 $\mathbf{v}_i$, 并且 $\overline{\mathbb{P}}_i$ 是在 $\mathbb{P}_i$ 中用 $\mathbf{v}_i$ 替换 $\mathbf{u}_i$ 得到的微分多项式. 如果 $\overline{\mathbb{P}}_i=0$ $(i=0,\ldots,n)$ 有公共解, 则 $\mathbf{R}(\mathbf{v}_0,\ldots,\mathbf{v}_n)=0$. 另一方面, 若 $\mathbf{R}(\mathbf{v}_0,\ldots,\mathbf{v}_n)=0$ 并且 $S_{\mathbf{R}}(\mathbf{v}_0,\ldots,\mathbf{v}_n)\neq 0$, 则 $\overline{\mathbb{P}}_i=0\,(i=0,\ldots,n)$ 有公共解, 这里 $S_{\mathbf{R}}=\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial u_{00}^{(h_0)}}$.

5 稀疏微分结式

首先, 定义稀疏微分结式, 给出稀疏微分结式存在的充要条件. 其次, 证明稀疏微分结式的基本性质. 最后, 基于对稀疏微分结式的阶数和次数界的估计, 给出计算稀疏微分结式的单指数时间算法.

5.1 稀疏微分结式的定义

定义 15 阶数为 s 的 Laurent 微分单项式是一个关于 $\mathbb{Y}^{[s]}=(y_i^{(k)})_{1\leqslant i\leqslant n;0\leqslant k\leqslant s}$ 的 Laurent 单项式. 具体地, Laurent 微分单项式具有如下形式:

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=0}^{s}(y_i^{(k)})^{d_{ik}},$$

这里的 d_{ik} 是整数, 可以取负值. Laurent 微分多项式是有限个 Laurent 微分单项式的线性组合, 其组合系数是 $\mathcal{E}$ 中的元素. 所有系数在 $\mathcal{E}$ 中的 Laurent 微分多项式构成的微分环称为 $\mathcal{E}$ 上的 Laurent 微分多项式环, 并记作 $\mathcal{E}\{\mathbb{Y},\mathbb{Y}^{-1}\}$.

定义 16 令 $\mathcal{E}^\wedge=\mathcal{E}\backslash\{a\in\mathcal{E}\mid\exists k\in\mathbb{N},\text{s.t.}\,a^{(k)}=0\}$. 设 f 是 $\mathcal{F}\{\mathbb{Y},\mathbb{Y}^{-1}\}$ 中的一个 Laurent 微分多项式. $(a_1,\ldots,a_n)\in(\mathcal{E}^\wedge)^n$ 称为 f 的非多项式微分零点, 如果 $f(a_1,\ldots,a_n)=0$.

假设 $\mathcal{A}_i=\{M_{i0},M_{i1},\ldots,M_{il_i}\}\,(i=0,1,\ldots,n)$, 这里的 M_{ik} 是阶数为 s_i 的 Laurent 微分单项式. 考虑 $n+1$ 个定义在 $\mathcal{A}_i$ $(i=0,1,\ldots,n)$ 上的一般 Laurent 微分多项式系统:

$$\mathbb{P}_i=\sum_{k=0}^{l_i}u_{ik}M_{ik},\quad i=0,\ldots,n,\tag{5.1}$$

其中所有 u_{ik} 在 $\mathbb{Q}$ 上是微分代数无关的. 为避免平凡性, 总是假设 $l_i\geqslant 1$ $(i=0,\ldots,n)$. 令

$$\mathbf{u}_i=(u_{i0},u_{i1},\ldots,u_{in}),\quad i=0,\ldots,n,$$

并记

$$\mathbf{u}=\{u_{ik}:i=0,\ldots,n;k=1,\ldots,l_i\}.$$

定义 17 形如 (5.1) 的一个 Laurent 微分多项式系统称为一个Laurent 微分本性系统, 如果存在 $k_i\,(i=0,\ldots,n)$, 其中 $1\leqslant k_i\leqslant l_i$, 使得

$$\text{d.tr.deg}\,\mathbb{Q}\left\langle \frac{M_{0k_0}}{M_{00}}, \frac{M_{1k_1}}{M_{10}}, \ldots, \frac{M_{nk_n}}{M_{n0}} \right\rangle \Big/ \mathbb{Q} = n.$$

这时也称 $\mathcal{A}_0,\ldots,\mathcal{A}_n$ 构成一个 Laurent 微分本性系统.

以下引理说明上述定义与分母 M_{i0} 的选取无关.

引理 18 "存在 $k_0,\ldots,k_n$ $(1\leqslant k_i\leqslant l_i)$ 使得 $\text{d.tr.deg}\,\mathbb{Q}\langle\frac{M_{0k_0}}{M_{00}},\ldots,\frac{M_{nk_n}}{M_{n0}}\rangle/\mathbb{Q}=n$" 的充分必要条件是 "存在指标对 $(k_i,j_i)\,(i=0,\ldots,n)$ 使得 $\text{d.tr.deg}\,\mathbb{Q}\langle\frac{M_{0k_0}}{M_{0j_0}},\ldots,\frac{M_{nk_n}}{M_{nj_n}}\rangle/\mathbb{Q}=n$, 其中 $0\leqslant k_i\neq j_i\leqslant l_i$".

定理 19 设 $\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n$ 是形如 (5.1) 的一个 Laurent 微分多项式系统. 令

$$\mathcal{I}=[\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n]\subset\mathbb{Q}\{\mathbb{Y},\mathbb{Y}^{-1};\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_n\},$$

则 $\mathcal{I}\cap\mathbb{Q}\{\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ 是余维数为 1 的微分素理想当且仅当 $\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n$ 构成一个 Laurent 微分本性系统.

假设 $\{\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n\}$ 是一个 Laurent 微分本性系统. 由定理 19, $[\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n]\subset\mathbb{Q}\{\mathbb{Y};\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ 的余维数为 1, 故存在不可约微分多项式 $\mathbf{R}(\mathbf{u};u_{00},\ldots,u_{n0})=\mathbf{R}(\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_n)\in\mathbb{Q}\{\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ 使得

$$[\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n]\cap\mathbb{Q}\{\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_n\}=\text{sat}(\mathbf{R}). \tag{5.2}$$

下面给出稀疏微分结式的定义:

定理 20 称 (5.2) 中的 $\mathbf{R}(\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_n)$ 为 Laurent 微分本性系统 $\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n$ 的稀疏微分结式, 记为 $\text{Res}_{\mathcal{A}_0,\ldots,\mathcal{A}_n}$ 或 $\text{Res}_{\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n}$. 当 $\mathcal{A}_0=\cdots=\mathcal{A}_n=\mathcal{A}$ 时, 简记为 $\text{Res}_{\mathcal{A}}$.

5.2 Laurent 微分本性系统的判别准则

对一个给定的形如 (5.1) 的 Laurent 微分多项式系统, 定理 21 给出 Laurent 微分本性系统的一个基于线性代数方法的判别准则.

设 $M_{ik}/M_{i0}=\prod_{j=1}^n\prod_{l=0}^{s_i}(y_j^{(l)})^{t_{ikjl}}$, 其中 $s_i=\text{ord}(\mathbb{P}_i)$. 令 $q=\max_{i=0}^n s_i$. 引入新的代数未定元 $x_1,\ldots,x_n$. 令 $d_{ikj}=\sum_{l=0}^q t_{ikjl}x_j^l\in\mathbb{Q}[x_j]$, 称 $\beta_{ik}=(d_{ik1},\ldots,d_{ikn})$ 为 M_{ik}/M_{i0} 的符号支撑向量. 令 $d_{ij}=\sum_{k=0}^{l_i}u_{ik}d_{ikj}$, 称 $(d_{i1},\ldots,d_{in})=\sum_{k=0}^{l_i}u_{ik}\beta_{ik}$ 为 $\mathbb{P}_i$ 的符号支撑向量. 矩阵

$$\boldsymbol{M}_{\mathbb{P}}=\begin{pmatrix} d_{01} & d_{02} & \ldots & d_{0n}\\ d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nn}\end{pmatrix}$$

称为微分多项式系统 (5.1) 的符号支撑矩阵.

定理 21 设 $\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n$ 是一个形如 (5.1) 的 Laurent 微分多项式系统, 则以下结论成立:

(1) $\text{d.tr.deg}\,\mathbb{Q}\langle\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_n\rangle\langle\frac{\mathbb{P}_0}{M_{00}},\ldots,\frac{\mathbb{P}_n}{M_{n0}}\rangle/\mathbb{Q}\langle\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_n\rangle=\text{rk}(\boldsymbol{M}_{\mathbb{P}})$.

(2) 微分素理想 $[\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n]\cap\mathbb{Q}\{\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ 的余维数为 $n+1-\text{rk}(\boldsymbol{M}_{\mathbb{P}})$. 因此, $\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n$ 构成 Laurent 微分本性系统的充要条件是 $\text{rk}(\boldsymbol{M}_{\mathbb{P}})=n$.

(3) $\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n$ 构成 Laurent 微分本性系统的充要条件是存在 k_i $(1\leqslant k_i\leqslant l_i)$ 使得 $\text{rk}(\boldsymbol{M}_{k_0,\ldots,k_n})=n$, 其中 $\boldsymbol{M}_{k_0,\ldots,k_n}$ 是 Laurent 微分单项式系统 $M_{0k_0}/M_{00},\ldots,M_{nk_n}/M_{n0}$ 的符号支撑矩阵.

5.3 稀疏微分结式的基本性质

稀疏微分结式具有与代数稀疏结式类似的性质:

定理 22 $\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n$ 的稀疏微分结式 $\mathbf{R}(\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_n)$ 具有以下性质:

(1) 对每个 $i=0,\ldots,n$, $\mathbf{R}(\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_n)$ 关于每组变量 $\mathbf{u}_i$ 都是微分齐次的.

(2) $h_i=\mathrm{ord}(\mathbf{R},\mathbf{u}_i)\leqslant J_i=\mathrm{Jac}(\mathbb{P}_{\hat{i}})$, 其中 $\mathrm{Jac}(\mathbb{P}_{\hat{i}})$ 是系统 $\mathbb{P}_{\hat{i}}=\{\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n\}\backslash\{\mathbb{P}_i\}$ 的 Jacobi 数 [23,24].

(3) 设 $\mathcal{Z}_0(\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n)$ 是 $\mathbb{P}_i$ 的系数 $\mathbf{u}_i$ 的所有使得 $\overline{\mathbb{P}}_i=0\,(i=0,\ldots,n)$ 有公共非多项式微分解的微分特定化的集合, $\mathcal{Z}(\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n)$ 为 $\mathcal{Z}_0(\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n)$ 的 Kolchin 微分闭包, 则 $\mathcal{Z}(\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n)=\mathbb{V}(\mathrm{sat}(\mathbf{R}))$.

(4) (微分环面簇) 假设 $\mathbb{P}_i\,(i=0,\ldots,n)$ 具有相同的支撑集 $\mathcal{A}=\{M_0,\ldots,M_l\}$, 并且 $\mathbb{P}_i$ 的稀疏微分结式存在. 考虑映射 $\phi_{\mathcal{A}}:(\mathcal{E}^\wedge)^n\to\mathbf{P}(l)$, 对每个点 $\xi\in(\mathcal{E}^\wedge)^n$, 令 $\phi_{\mathcal{A}}(\xi)=(M_0(\xi),\ldots,M_l(\xi))$. 映射 $\phi_{\mathcal{A}}$ 的像集的 Kolchin 射影微分闭包称为关于 $\mathcal{A}$ 的微分环面簇, 记为 $X_{\mathcal{A}}$. 我们证明了微分环面簇是一个微分维数为 n 的不可约微分射影簇. 进一步, $\mathbf{R}$ 是 $X_{\mathcal{A}}$ 的射影微分周形式.

(5) 设 $\mathbf{u}_0$ 在 $\mathbf{R}$ 中出现且 $t_0=\deg(\mathbf{R},u_{00}^{(h_0)})$, 则存在某个微分扩域 $(\mathcal{F}_\tau,\delta_\tau)$ 中的元素 $\xi_{\tau k}\,(\tau=1,\ldots,t_0)$ 使得

$$\mathbf{R}=A\prod_{\tau=1}^{t_0}\left(u_{00}+\sum_{k=1}^{l_0}u_{0k}\xi_{\tau k}\right)^{(h_0)},$$

这里的 A 是 $\mathbb{Q}\langle\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n\rangle[\mathbf{u}_0^{[h_0]}\backslash u_{00}^{(h_0)}]$ 中的微分多项式.

(6) $\deg(\mathbf{R})\leqslant\prod_{i=0}^n(m_i+1)^{h_i+1}\leqslant(m+1)^{\sum_{i=0}^n(J_i+1)}$, 其中 $m_i=\deg(\mathbb{P}_i,\mathbb{Y})$, $m=\max_i\{m_i\}$.

(7) $\mathbf{R}$ 具有表示

$$\prod_{i=0}^n M_{i0}^{(h_i+1)\deg(\mathbf{R})}\cdot\mathbf{R}=\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^{h_i}G_{ij}\big(\mathrm{N}(\mathbb{P}_i)\big)^{(j)},$$

这里的 $G_{ij}\in\mathbb{Q}[\mathbf{u}_0^{[h_0]},\ldots,\mathbf{u}_n^{[h_n]},\mathbb{Y}^{[h]}]\,(h=\max\{h_i+s_i\})$ 满足

$$\deg(G_{ij}(\mathbb{P}_i)^{(j)})\leqslant\left[m+1+\sum_{i=0}^n(h_i+1)\deg(M_{i0})\right]\deg(\mathbf{R}).$$

设 $\mathbb{P}_i\,(i=0,\ldots,n)$ 是一组阶数为 s_i 次数为 m_i 的一般微分多项式系统, $\mathbf{R}(\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_n)$ 是 $\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n$ 的微分结式. 则微分结式的一个 BKK 类型的次数界如下:

定理 23 对每个 $i\in\{0,1,\ldots,n\}$, 微分结式关于 $\mathbb{P}_i$ 的系数 $\mathbf{u}_i$ 的次数上界为

$$\deg(\mathbf{R},\mathbf{u}_i)\leqslant\sum_{k=0}^{s-s_i}\mathcal{M}((\mathcal{Q}_{jl})_{j\neq i,0\leqslant l\leqslant s-s_j},\mathcal{Q}_{i0},\ldots,\mathcal{Q}_{i,k-1},\mathcal{Q}_{i,k+1},\ldots,\mathcal{Q}_{i,s-s_i}),$$

这里 $\mathcal{Q}_{jl}$ 是 $(\mathbb{P}_j)^{(l)}$ 作为 $y_1^{[s]},\ldots,y_n^{[s]}$ 的多项式时的 Newton 多面体, $\mathcal{M}(S)$ 是 S 的混合体积.

5.4 计算稀疏微分结式的单指数时间算法

基于定理 22 中对稀疏微分结式阶数和次数上界的估计, 我们给出计算稀疏微分结式 $\mathbf{R}$ 的一个单指数算法. 这个算法的思想是在阶数和次数递增的过程中对给定的阶数和次数用线性代数方法寻找 $\mathbf{R}$ 的系数. 定理 22 给出的阶数和次数上界保证算法是终止的. 具体来说,

算法 SDResultant: (1) 对阶数 h_i 从 0 到 J_i 以及次数 D 从 1 到 $\prod_{i=0}^n(m_i+1)^{h_i+1}$ 自适应地搜索 $\mathbf{R}$.

(2) 对固定的 h_i 和 D, 通过求解由等式

$$\prod_{i=0}^{n} N_{i0}^{(h_i+1)D}\mathbf{R}(\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_n)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{h_i}G_{ik}\mathbb{P}_i^{(k)}$$

导出的关于 $\mathbf{R}$ 和 G_{ik} 系数的线性方程组来计算 $\mathbf{R}$.

定理 24 (复杂度) 计算 $\mathbb{P}_0,\ldots,\mathbb{P}_n$ 的稀疏微分结式最多需要 $O\big(m^{O(nlJ^2)}(nJ)^{O(lJ)}\big)$ 次 $\mathbb{Q}$- 四则运算, 其中 n 是微分变量的个数, $J=1+\sum_{i=0}^n J_i$ 是系统的 Jacobi 数, $l=\sum_{i=0}^n(l_i+1)$ 是稀疏系统的长度.

定理 24 说明了算法关于 n, l 和 J 是单指数时间复杂度的. 注意到即使计算代数稀疏结式的复杂度都是单指数的[18], 因此, 这里给出的单指数复杂度的算法是一个很好的算法. 实际上, 这是非线性微分多项式系统的第一个单指数复杂度的微分消元算法.

致谢 作者在此衷心感谢导师高小山研究员的悉心指导和耐心培育, 并借此机会感谢李子明研究员、Phyllis Cassidy 和 William Sit 对我科研工作所提供的诸多帮助, 同时感谢数学机械化实验室所有支持并帮助过我的老师和同学.

参考文献

1 李伟. 微分周形式与稀疏微分结式. 博士学位论文. 北京: 中国科学院, 2012
2 Gao X, Li W, Yuan C. Intersection theory in differential algebraic geometry: Generic intersections and the differential Chow form. Trans Amer Math Soc, 2013, 365: 4575–4632
3 Li W, Gao X. Differential Chow form for projective differential variety. J Algebra, 2012, 370: 344–360
4 Li W, Gao X, Yuan C. Sparse differential resultant. In: Proceedings of the 36th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. San Jose: ACM, 2011, 225–232
5 Li W, Yuan C, Gao X. Sparse differential resultant for Laurent differential polynomials. ArXiv:1111.1084v3, 2012
6 Li W, Yuan C, Gao X. Sparse difference resultant. In: Proceedings of the 38th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. Boston: ACM, 2013, 275–282
7 Chow W, van der Waerden B. Zur algebraiche geometries IX. Math Ann, 1937, 113: 692–704
8 Hodge W, Pedoe D. Methods of Algebraic Geometry, II. Cambridge: Cambridge University Press, 1968
9 Wu W. On chern numbers of algebraic varieties with arbitrary sigularities. Acta Math Sin Engl Ser, 1987, 3: 227–238
10 Nesterenko Y. Estimates for the orders of zeros of functions of a certain class and applications in the theory of transcendental numbers. Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat, 1977, 41: 253–284
11 Philippon P. Critères pour l'indépendance algébrique. Inst Hautes Études Sci Publ Math, 1986, 64: 5–52
12 Brownawell W D. Bounds for the degrees in the nullstellensatz. Ann Math, 1987, 126: 577–591
13 Eisenbud D, Schreyer F, Weyman J. Resultants and Chow forms via exterior syzygies. J Amer Math Soc, 2004, 16: 537–579
14 Jeronimo G, Krick T, Sabia J, et al. The computational complexity of the Chow form. Found Comput Math, 2004, 4: 41–117
15 Gel'fand I, Kapranov M, Zelevinsky A. Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants. Boston: Birkhäuser, 1994
16 Sturmfels B. On the Newton polytope of the resultant. J Algebraic Combin, 1994, 3: 207–236
17 Canny J, Emiris I. A subdivision-based algorithm for the sparse resultant. J ACM, 2000, 47: 417–451
18 Emiris I. Sparse elimination and applications in kinematics. PhD thesis. Berkeley: University of California, 1994
19 D'Andrea C. Macaulay style formulas for sparse resultants. Trans Amer Math Soc, 2002, 354: 2595–2629
20 Ritt J. Differential Equations from the Algebraic Standpoint. New York: Amer Math Soc, 1932
21 Kolchin E. Differential algebra and algebraic groups. New York: Academic Press, 1973
22 Ritt J. Differential Algebra. New York: Amer Math Soc, 1950
23 Cohn R. Order and dimension. Proc Amer Math Soc, 1983, 87: 1–6
24 Ritt J. Jacobi's problem on the order of a system of differential equations. Ann Math, 1935, 36: 303–312

Differential Chow form and sparse differential resultant

LI Wei

Abstract The Chow form and the sparse resultant are both basic concepts in algebraic geometry and also powerful tools in elimination theory. Given the fact that they play an important role in both theoretic and algorithmic aspects of algebraic geometry, it is worthwhile to develop the theory of Chow forms and resultants in differential algebraic geometry. But due to the the complicated structure of differential polynomials, the theory of resultants in differential case is not fully explored and the differential Chow form as well as the sparse differential resultant is not studied before. The main results in this work include the following three parts: Firstly, an intersection theory for generic differential polynomials is presented. As a consequence, the dimension conjecture for generic differential polynomials is proved. Secondly, the Chow form for an irreducible differential variety is defined and most of the properties of the Chow form in the algebraic case are established for its differential counterpart. In particular, a Possion-type product formula for differential Chow forms is given, the concept of the leading differential degree is introduced, and the existence of the differential Chow variety for a special class of differential algebraic cycles is proved. Then as an application, the rigorous definition of differential resultant is given and properties similar to those of the Macaulay resultant are proved. Thirdly, the theory of sparse differential resultants is established, and a single exponential algorithm to compute the sparse differential resultant is given. The concept of Laurent differentially essential systems is introduced and the sparse differential resultant is defined. Then its basic properties are proved. In particular, the concept of differential toric varieties is introduced, and order and degree bounds for the sparse differential resultant are given. Based on these bounds, a single exponential algorithm to compute the sparse differential resultant is proposed.

Keywords **differential Chow form, differential Chow variety, differential intersection theory, sparse differential resultant, Laurent differentially essential system**

MSC(2010) **12H05, 14C05**

doi: 10.1360/012013-151