第56卷第2期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.56, No.2
2013年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Mar., 2013

文章编号: 0583-1431(2013)02-0203-08 **文献标识码: A**

双变元有理形式幂级数的对角定理的注记

吴晓丽

杭州电子科技大学理学院 杭州 310018
中国科学院数学机械化重点实验室 北京 100190
E-mail: xlwu@amss.ac.cn

陈绍示

北卡罗莱纳州立大学数学系 罗利 NC27695
E-mail: schen21@ncsu.edu

摘　要　在组合数学与数学物理中, 许多特殊函数满足系数为多项式的线性微分方程. 这类函数被称为 D- 有限函数. 上世纪 80 年代, Gessel, Stanley, Zeilberger 等组合学家猜想多变元有理形式幂级数的对角是 D- 有限的. Gessel 和 Zeilberger 分别在其文章中给出了该猜想的证明. 但是, Lipshitz 在其文章中指出他们的证明是不完备的. 本文基于对角算子的一些基本性质, 给出了两个变元情形下 Gessel 证明的更直接的修补办法.

关键词　对角定理; D- 有限; P- 递归
MR(2010) 主题分类　13F25, 05A15, 68Q40
中图分类　O155, O157.1

A Note on the Diagonal Theorem of Bivariate Rational Formal Power Series

Xiao Li WU

School of Science, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, *P. R. China*
Key Laboratory of Mathematics Mechanization, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, *P. R. China*
E-mail: *xlwu@amss.ac.cn*

Shao Shi CHEN

*Department of Mathematics, North Carolina State University, Raleigh, NC*27695
E-mail: *schen21@ncsu.edu*

Abstract　Special functions that satisfy linear differential equations with polynomial coefficients appear ubiquitously in combinatorics and mathematical physics. Such kind

收稿日期: 2012-06-04; 接受日期: 2012-09-17
基金项目: 国家自然科学基金天元数学专项基金 (11126089); 美国国家自然科学基金 (CCF-1017217)

of special functions are called D-finite functions by Stanley. In the early 1980's, many combinatorists, such as Gessel, Stanley, Zeilberger etc., conjectured that the diagonal of rational power series in several variables is D-finite. Gessel and Zeilberger proved this conjecture in their papers, respectively. Later, Lipshitz pointed out that their proofs are not complete and he gave a proof by basing on a different idea. Zeilberger completed his proof with the theory of holonomic D-modules. In this note, we follow the spirit of Gessel's proof strategy and fix the gap in his proof in the case of bivariate rational formal power series. The key ingredients we used are some basic properties of the diagonal operation.

Keywords Diagonal theorem; D-finite; P-recursive
MR(2010) Subject Classification 13F25, 05A15, 68Q40
Chinese Library Classification O155, O157.1

1 引言

在组合数学与数学物理中, 许多特殊函数满足多项式系数的线性微分方程. 这类函数被称为 D- 有限函数. 在文 [1, 2] 中, Gessel 和 Zeilberger 证明了任意多个变元的有理形式幂级数的对角 (diagonal) 是 D- 有限的. 但是, Lipshitz 在文 [3] 中指出他们的证明是不完备的. Christol 在文 [4] 中运用线性空间维数估计的技巧重新证明了有理情形的对角定理. 进一步, Lipshitz [3], Haible 和 Stoll [5] 分别独立地证明了更一般的结果: 任一 D- 有限的多变元形式幂级数的对角是 D- 有限的. 本文将针对两个变元情形给出 Gessel 证明的修补.

2 对角定理

首先回顾双变元有理形式幂级数的对角定理, 为此需要介绍一些基本定义.

设 K 是特征为零的域, $K(x,y)$ 是 K 上关于变元 x,y 的有理函数域. 设 $K[[x,y]]$ 是 K 上关于变元 x,y 的形式幂级数环. 因为 $K[[x,y]]$ 是整环, 所以存在分式域, 记为 $K((x,y))$, 也称为 K 上关于变元 x,y 的形式 Laurent 级数域. 注意到, 域 $K((x,y))$ 可以看成有理函数域 $K(x,y)$ 上的线性空间. 分别记 D_x, D_y 为域 $K((x,y))$ 上关于变元 x,y 的导数算子 $\partial/\partial_x, \partial/\partial_y$. 因为它们作用在不同的变元上, 所以对所有 $F \in K((x,y))$, 有 $D_xD_y(F) = D_yD_x(F)$ 成立. 进一步设 $K(x,y)\langle D_x, D_y\rangle$ 为 $K(x,y)$ 上关于 x,y 的线性微分算子环. 该环中的乘法满足如下条件: $D_xD_y = D_yD_x$, 且对所有 $F \in K(x,y)$ 有下面等式成立

$$D_xF = FD_x + D_x(F), \quad D_yF = FD_y + D_y(F).$$

因此 $K(x,y)\langle D_x, D_y\rangle$ 是非交换环.

定义 2.1 设 $F(x,y) = \sum_{m,n\geq 0} f(m,n)x^my^n \in K[[x,y]]$. 称单变元形式幂级数

$$\sum_{n\geq 0} f(n,n)t^n \in K[[t]]$$

为 F 的对角 (diagonal), 记为 $\triangle(F)$.

在文 [1, 定理 1] 中, Gessel 给出了有理函数可展成形式幂级数的充分必要条件. 下面对双变元形式幂级数的情况加以叙述: 设有理函数 $F = P/Q \in K(x,y)$ 满足 P, Q 是 $K[x,y]$ 中互素的

多项式, 则 $F \in K[[x, y]]$ 当且仅当 $Q(0, 0) \neq 0$. 下文中, 将假设所考虑的有理函数总满足该条件.

定义 2.2 设 $G(t)=\sum_{n\geq 0} g(n)t^n \in K[[t]]$. 如果由 $\{D_t^i(G) \mid i \in \mathbb{N}\}$ 在 $K(t)$ 上张成的线性空间的维数是有限的, 那么称 G 在 $K(t)$ 上是 D- 有限的 (differentiably finite).

根据定义, 如果 $G \in K[[t]]$ 是 $K(t)$ 上 D- 有限的, 那么存在非零线性微分算子 $L(t, D_t) \in K(t)\langle D_t\rangle$, 使得 $L(F)=0$.

定义 2.3 设 $f: \mathbb{N} \to K$ 为 K 上的离散序列. 如果存在 $K[n]$ 上的有限个不全为零的多项式 $r_0(n), r_1(n), \ldots, r_k(n)$, 使得

$$r_k(n)f(n+k)+r_{k-1}(n)f(n+k-1)+\cdots+r_0(n)f(n)=0 \quad \text{对所有 } n \in \mathbb{N} \text{ 成立}, \tag{2.1}$$

那么称 $f(n)$ 为在 K 上是 P- 递归的 (polynomially recursive).

对于离散序列 $f(n)$, 称集合 $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq 0\}$ 为 $f(n)$ 的支集, 记为 Supp_f. 注意到如果 Supp_f 是有限集合, 那么 $f(n)$ 是 P- 递归的, 因为 $f(n)$ 满足

$$\left(\prod_{i\in \mathrm{Supp}_f}(n-i)\right)f(n)=0 \quad \text{对所有 } n \in \mathbb{N} \text{ 成立}. \tag{2.2}$$

下面定理给出了 D- 有限的形式幂级数和 P- 递归的离散序列之间的联系.

定理 2.4 [6] 形式幂级数

$$G=\sum_{n\geq 0} g(n)t^n \in K[[t]]$$

是在 $K(t)$ 上 D- 有限的当且仅当 $g(n)$ 是在 K 上 P- 递归的.

下面叙述双变元有理形式幂级数的对角定理.

定理 2.5 如果 $F(x, y)$ 为 $K(x, y)$ 中的有理函数并且可以展开成形式幂级数, 那么 F 的对角 $\Delta(F) \in K[[t]]$ 在 $K(t)$ 上是 D- 有限的.

注记 2.6 在文 [7] 中, Furstenberg 运用积分表示方法证明了比上定理更强的结果, 即双变元有理形式幂级数的对角是单变元代数函数. 但是, 该结论在一般多变元情形是不成立的.

3 Gessel 的证明

为了证明定理 2.5, Gessel 在文 [1] 中首先证明了如下结论.

定理 3.1 [1] 令 $F=P/Q$ 为 $K(x, y)$ 中的有理函数, 其中 P, Q 是 $K[x, y]$ 中互素的多项式, 且 $Q(0, 0) \neq 0$, 同时令 b_1, b_2 为任意的非负整数. 那么存在有限个非零常数 $e_{i,j,k} \in K$, 满足

$$\sum_{i,j,k} e_{i,j,k} D^i \theta_x^j \theta_y^k(F)=0, \tag{3.1}$$

其中

$$D=D_x^{b_1}D_y^{b_2}, \quad \theta_x=xD_x, \text{ 且 } \theta_y=yD_y.$$

因为 $Q(0, 0) \neq 0$, 所以 F 可以展开成形式幂级数

$$\sum_{m,n\geq 0} f(m, n)x^m y^n \in K[[x, y]].$$

对比 (3.1) 中 x^my^n 的系数, Gessel 得到结论: 存在不全为零的多项式 $r_0(m,n),\ldots,r_k(m,n)$, 使得

$$\sum_{i=0}^{k} r_i(m,n)f(m+b_1i,n+b_2i)=0 \quad \text{对所有非负整数 } m,n \text{ 成立.} \tag{3.2}$$

令 (3.2) 中的 $m=a_1+b_1n$ 和 $n=a_2+b_2n$, 因此得到函数

$$g(n)=f(a_1+b_1n,a_2+b_2n) \tag{3.3}$$

对于任意的非负整数 a_1,a_2 是 P- 递归的. 如果选择 $a_1=a_2=0$ 且 $b_1=b_2=1$, 那么 $f(n,n)$ 是 P- 递归的. 于是对角 $\Delta(F)$ 是 D- 有限的.

在上述证明中, Gessel 并没有证明当 $m=a_1+b_1n$ 且 $n=a_2+b_2n$ 时, $r_i(m,n)$ 是不全为零的. 在一般情况下, 这个条件不一定能满足. 下面例子说明由 (3.1) 中 F 的非平凡零化子出发, 并不总能找到对角的非平凡递归关系. 由此 Gessel 的证明是不完备的.

例子 3.2 令 $F=\frac{1}{1-xy}$. 那么 F 满足 $(\theta_x-\theta_y)(F)=0$, 这就蕴含着 $(m-n)f(m,n)=0$, 但是当 $m=n$ 时 $m-n\equiv 0$.

4 Gessel 证明的修补

下面的引理总结了例子 3.2 中不能用 Gessel 的方法找到对角的系数所满足的非平凡递归关系的有理函数的性质.

引理 4.1 令 F 为 $K(x,y)$ 中的有理函数. 那么存在单变元有理函数 $G\in K(t)$, 使得 $F=G(xy)$ 的充分必要条件是 $(\theta_x-\theta_y)(F)=0$.

证明 令 $F=P/Q\in K(x,y)$, 其中 P,Q 是 $K[x,y]$ 中互素的多项式. 如果存在有理函数 $G\in K(t)$, 使得 $F=G(xy)$, 那么由复合函数求导规则可得

$$(\theta_x-\theta_y)(F)=(\theta_x-\theta_y)(G(xy))=xyD_t(G(t))|_{t=xy}-yxD_t(G(t))|_{t=xy}=0. \tag{4.1}$$

反之, 如果 $(\theta_x-\theta_y)(F)=0$ 那么

$$(\theta_x-\theta_y)\left(\frac{P}{Q}\right)=\frac{(xQD_x(P)-xPD_x(Q)-yQD_y(P)+yPD_y(Q))}{Q^2}=0. \tag{4.2}$$

因此有

$$Q(xD_x(P)-yD_y(P))=P(xD_x(Q)-yD_y(Q)).$$

因为 P,Q 是 $K[x,y]$ 中互素的多项式, 所以 $P\mid(xD_x(P)-yD_y(P))$ 且 $Q\mid(xD_x(Q)-yD_y(Q))$.记

$$P=\sum_{i,j\geq 0}p_{i,j}x^iy^j\in K[x,y],$$

定义 $\deg_x(P)=\max\{i\,|\,p_{i,j}\neq 0\}$, 类似地可以定义 $\deg_y(P)$. 通过讨论多项式的次数得到

$$\deg_x(xD_x(P)-yD_y(P))\leq\deg_x(P) \quad \text{且} \quad \deg_y(xD_x(P)-yD_y(P))\leq\deg_y(P),$$

所以存在 $\lambda\in K$, 使得

$$xD_x(P)-yD_y(P)=\lambda P \quad \text{且} \quad xD_x(Q)-yD_y(Q)=\lambda Q,$$

即

$$xD_x(P)-yD_y(P)=\sum_{i,j\geq 0}(i-j)p_{i,j}x^iy^j=\sum_{i,j\geq 0}\lambda p_{i,j}x^iy^j.$$

那么就有下面两种情况:

- 如果 P 的对角中至少有一个非零项, 即对某个 $k\in\mathbb{N}$, 有 $p_{k,k}\neq 0$. 因为 $\lambda p_{k,k}=0$, 所以 $\lambda=0$. 由此可知, 当 $i\neq j$ 时有 $p_{i,j}=0$, 即只有对角上的系数不为零. 那么存在多项式 $G\in K[t]$, 使得 $P=G(xy)$. 同样对于分母 Q, 存在多项式 $H\in K[t]$, 使得 $Q=H(xy)$. 所以得到 $F=G/H\in K(xy)$.
- 如果 P 与 Q 的对角上的系数都为零. 于是 P 和 Q 中出现的 x^iy^j 项满足 $0\neq i-j=\lambda$. 不失一般性, 假设 $\lambda>0$. 记 $x^{j_1+\lambda}y^{j_1}$ 和 $x^{j_2+\lambda}y^{j_2}$ 分别为 P 和 Q 中出现的关于 y 的次数最小的项, 其中 j_1,j_2 为非负整数. 因而 $x^{j_1+\lambda}y^{j_1}\mid P$ 且 $x^{j_2+\lambda}y^{j_2}\mid Q$. 不失一般性, 假设 $j_1\leq j_2$, 那么 $x^{j_1+\lambda}y^{j_1}$ 是 P 和 Q 的非平凡公因子, 这与 P 和 Q 在 $K[x,y]$ 中互素相矛盾.

综合上述两种情况, 命题得证.

下面将上述引理推广到双变元有理形式幂级数情形.

引理 4.2 令

$$F\in K(x,y)\cap K[[x,y]].$$

那么存在 $G\in K(t)$, 使得 $F=G(xy)$ 的充分必要条件是 $(\theta_x-\theta_y)^d(F)=0$, 其中 d 为正整数.

证明 令

$$F=\sum_{m,n\geq 0} f(m,n)x^my^n\in K(x,y)\cap K[[x,y]].$$

如果存在 $G\in K(t)$, 使得 $F=G(xy)$, 那么只要选取 $d=1$ 就成立

$$(\theta_x-\theta_y)(F)=(\theta_x-\theta_y)(G(xy))=xyD_t(G(t))\mid_{t=xy}-yxD_t(G(t))\mid_{t=xy}=0. \tag{4.3}$$

反之, 如果 $(\theta_x-\theta_y)^d(F)=0$, 我们将对 d 进行归纳证明. 如果 $d=1$, 命题即引理 4.1. 下面假设 $d>1$ 并且命题对 $d-1$ 成立. 由引理 4.1 可知存在 $G\in K(t)$, 使得 $(\theta_x-\theta_y)^{d-1}(F)=G(xy)$. 直接计算可得

$$(\theta_x-\theta_y)^{d-1}(F)=\sum_{m,n\geq 0}(m-n)^{d-1}f(m,n)x^my^n.$$

同时 $G=\sum_{n\geq 0} g(n)(xy)^n$. 因此对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 有 $g(n)=0$, 即 $G=0$. 由此得到

$$(\theta_x-\theta_y)^{d-1}(F)=0.$$

由归纳假设命题成立. 证毕.

因为 $\theta_x\theta_y=\theta_y\theta_x$, 所以环 $K[\theta_x,\theta_y]$ 是交换的. 下面引理将刻画取对角运算与算子 θ_x, θ_y 以及 $D=D_xD_y$ 的联系.

引理 4.3 令 $F\in K[[x,y]]$, 则

$$\Delta(\theta_x(F))=\theta_t(\Delta(F)),\quad \Delta(\theta_y(F))=\theta_t(\Delta(F))\quad \text{且}\quad \Delta(D(F))=D_t\theta_t(\Delta(F)),$$

其中 $\theta_t=tD_t$.

证明 令

$$F=\sum_{m,n\geq 0} f(m,n)x^my^n\in K[[x,y]].$$

那么

$$\Delta(\theta_x(F)) = \Delta\bigg(\sum_{m,n\geq 0} mf(m,n)x^m y^n\bigg) = \sum_{n\geq 0} nf(n,n)t^n$$
$$= \theta_t\bigg(\sum_{n\geq 0} f(n,n)t^n\bigg) = \theta_t(\Delta(F)).$$

同理可以证明 $\Delta(\theta_y(F)) = \theta_t(\Delta(F))$. 直接计算可得

$$\Delta(D(F)) = \Delta\bigg(\sum_{m,n\geq 0}(m+1)(n+1)f(m+1,n+1)x^m y^n\bigg)$$
$$= \sum_{n\geq 0}(n+1)^2 f(n+1,n+1)t^n.$$
$$D_t\theta_t(\Delta(F)) = D_t\bigg(\sum_{n\geq 0} nf(n,n)t^n\bigg) = \sum_{n\geq 1} n^2 f(n,n)t^{n-1}$$
$$= \sum_{n\geq 0}(n+1)^2 f(n+1,n+1)t^n.$$

所以 $\Delta(D(F)) = D_t\theta_t(\Delta(F))$ 成立.

引理 4.4 令 $L = \sum_{i=0}^m \ell_i(\theta_x,\theta_y)D^i$ 为环 $K\langle\theta_x,\theta_y,D\rangle$ 中非零算子且存在 $j\in\{0,1,\ldots,m\}$ 满足 $\ell_j(\theta_t,\theta_t)\neq 0$, 则算子

$$\sum_{i=0}^m \ell_i(\theta_t,\theta_t)(D_t\theta_t)^i$$

为环 $K[t]\langle D_t\rangle$ 中的非零算子.

证明 令 $i_1,\ldots,i_s\in\{0,1,\ldots,m\}$ 为满足 $\ell_{i_k}(\theta_t,\theta_t)\neq 0$ 的所有下标且由命题假设 $s>0$. 不失一般性, 我们可以假设 $i_1<i_2<\cdots<i_s$. 如此我们可以把 L 写成如下形式

$$L = \ell_{i_s}(\theta_x,\theta_y)D^{i_s}+\cdots+\ell_{i_1}(\theta_x,\theta_y)D^{i_1}+\tilde{L},\quad 其中\ \tilde{L}(\theta_t,\theta_t,D_t\theta_t)=0.$$

因为 K 是特征为零的域, 那么存在充分大的正整数 $\lambda\in\mathbb{N}$, 使得对所有 $k\in\{1,\ldots,s\}$ 成立 $\ell_{i_k}(\lambda-i_k,\lambda-i_k)\neq 0$ 且 $\lambda>i_s$. 为了证明 $L(\theta_t,\theta_t,D_t\theta_t)\neq 0$, 我们只须证明

$$L(\theta_t,\theta_t,D_t\theta_t)(t^\lambda)\neq 0.$$

通过直接计算, 得到

$$\ell_{i_k}(\theta_t,\theta_t)(D_t\theta_t)^{i_k}(t^\lambda) = \ell_{i_k}(\lambda-i_k,\lambda-i_k)(\lambda)_{i_k}^2 t^{\lambda-i_k}\neq 0,$$

其中

$$(\lambda)_{i_k}\triangleq\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i_k+1).$$

进一步, 我们可以得到

$$L(\theta_t,\theta_t,D_t\theta_t)(t^\lambda) = \ell_{i_s}(\lambda-i_s,\lambda-i_s)(\lambda)_{i_s}^2 t^{\lambda-i_s}+\cdots+\ell_{i_1}(\lambda-i_1,\lambda-i_1)(\lambda)_{i_1}^2 t^{\lambda-i_1}.$$

因为 $i_1<i_2<\cdots<i_s$ 且 $\ell_{i_k}(\lambda-i_k,\lambda-i_k)(\lambda)_{i_k}^2\neq 0$, 所以 $L(\theta_t,\theta_t,D_t\theta_t)(t^\lambda)$ 作为关于 t 的多项式不等于零. 证毕.

引理 4.5 令 F 为 $K[[x,y]]$ 中的有理形式幂级数. 如果存在非零算子 $L\in K[\theta_x,\theta_y]$, 使得 $L(F)=0$, 那么 $\Delta(F)$ 是 D- 有限的.

证明 令 $F=\sum_{m,n\geq 0} f(m,n)x^m y^n \in K[[x,y]]$ 且 $L\in K[\theta_x,\theta_y]$ 满足 $L(F)=0$. 因为 $K[\theta_x,\theta_y]$ 是交换环, 所以 L 可以写成

$$L=(\theta_x-\theta_y)^{\ell}\tilde{L}, \tag{4.4}$$

其中 $\ell\in\mathbb{N}$, $\tilde{L}\in K[\theta_x,\theta_y]$ 且 $(\theta_x-\theta_y)\nmid\tilde{L}$.

- 如果 $\ell=0$, 记 $L=\sum_{i,j\geq 0}\lambda_{i,j}\theta_x^i\theta_y^j$, 那么

$$L(F)=\sum_{m,n\geq 0}\left(\sum_{i,j}\lambda_{i,j}m^i n^j f(m,n)\right)x^m y^n=0. \tag{4.5}$$

因而对任意 $m,n\in\mathbb{N}$, 有

$$\sum_{i,j}\lambda_{i,j}m^i n^j f(m,n)=0.$$

因为 $(\theta_x-\theta_y)\nmid L$, 所以

$$(m-n)\nmid\sum_{i,j}\lambda_{i,j}m^i n^j.$$

因此 $r(n,n)=\sum_{i,j}\lambda_{i,j}n^{i+j}$ 非恒等于零且在 $\mathbb{N}$ 中只有有限个根. 这表明 F 的对角上系数仅有有限个是非零的. 从而 $\Delta(F)$ 是 D- 有限的.

- 如果 $\ell>0$, 那么由引理 4.2, 存在 $G\in K(t)$, 使得

$$\tilde{L}(F)=G(xy). \tag{4.6}$$

由引理 4.3 可得 $\Delta(\tilde{L}(F))=\tilde{L}(\theta_t,\theta_t)(\Delta(F))$. 由对角的定义可知 $\Delta(G(xy))=G(t)$. 在 (4.6) 的两边取对角得到

$$\tilde{L}(\theta_t,\theta_t)(\Delta(F))=G(t).$$

因为 $(\theta_x-\theta_y)\nmid\tilde{L}$, 所以 $\tilde{L}_0=\tilde{L}(\theta_t,\theta_t)\neq 0$. 令 $G=P/Q$, 其中 $P,Q\in K[t]$, 那么算子

$$\tilde{L}_1=PQD_t-QD_t(P)-PD_t(Q)\in K[t]\langle\theta_t\rangle$$

零化 G. 于是 $\Delta(F)$ 满足 $\tilde{L}_1\tilde{L}_0(\Delta(F))=0$. 由此可知 $\Delta(F)$ 是在 $K(t)$ 上 D- 有限的.

综合上述两种情况分析, 命题得证.

有了前面的准备, 下面给出双变元有理形式幂级数对角定理的完整证明.

定理 2.5 的证明 令 $F=P/Q\in K(x,y)\cap K[[x,y]]$. 根据定理 3.1, 存在有限个非零常数 $e_{i,j,k}\in K$, 满足

$$\sum_{i=0}^{s}\sum_{j,k}e_{i,j,k}D^i\theta_x^j\theta_y^k(F)=0. \tag{4.7}$$

如果 $s=0$, 那么由引理 4.5 知 $\Delta(F)$ 是 D- 有限的. 下面假设 $s>0$. 令

$$L=\sum_{i=0}^{s}\sum_{j,k}e_{i,j,k}D^i\theta_x^j\theta_y^k.$$

注意到 $D\theta_x=\theta_x D+D$ 且 $D\theta_y=\theta_y D+D$. 那么 L 总可以写成

$$L=(\theta_x-\theta_y)^{\ell}\tilde{L}, \tag{4.8}$$

其中

$$\tilde{L}=\sum_{i=0}^{m}\ell_i(\theta_x,\theta_y)D^i\in K[\theta_x,\theta_y,D]$$

且存在 $j\in\{1,\ldots,m\}$, 使得 $\ell_j(\theta_t,\theta_t)\neq 0$. 如果 $\ell>0$, 那么由引理 4.2 可知存在 $G\in K(t)$, 使得 $\tilde{L}(F)=G(xy)$. 对等式 $\tilde{L}(F)=G(xy)$ 两边取对角可得

$$\tilde{L}_0(\Delta(F))=G(t),$$

其中

$$\tilde{L}_0=\sum_{i=0}^{m}\ell_i(\theta_t,\theta_t)(D_t\theta_t)^i.$$

由引理 4.4 可知 $\tilde{L}_0\neq 0$. 令 $G=P/Q$, 其中 $P,Q\in K[t]$, 那么算子

$$\tilde{L}_1=PQD_t-QD_t(P)-PD_t(Q)\in K[t]\langle\theta_t\rangle$$

零化 G. 于是 $\Delta(F)$ 满足

$$\tilde{L}_1\tilde{L}_0(\Delta(F))=0.$$

证毕.

例子 4.6 令 $F=\frac{1}{1-x-y}$. 由定理 3.1 可找到非零算子

$$L(\theta_x,\theta_y,D):=\theta_x^2+\theta_y^2+2\theta_x\theta_y+3\theta_x+3\theta_y-D+2$$

满足 $L(F)=0$. 依据定理 2.5 的证明过程可得到 F 的对角 $\Delta(F)$ 所满足的线性微分方程为

$$L(\theta_t,\theta_t,D_t\theta_t)(\Delta(F))=0,$$

其中

$$L(\theta_t,\theta_t,D_t\theta_t)=(4t^2-t)D_t^2+(10t-1)D_t+2.$$

5 结论

本文基于对角算子的一些基本性质, 修补了 Geseel 关于双变元有理形式幂级数对角定理证明中的漏洞. 本文的证明过程其实也蕴涵着构造对角所满足的微分方程的算法. 在后续工作中, 我们将在算法方面进行更深入的研究, 并考虑推广本文的方法, 从而给出多变元有理形式幂级数对角定理的新的完整证明.

致谢 感谢中国科学院数学与系统科学研究院数学机械化中心开放课题的资助.

参考文献

[1] Gessel I. M., Two theorems on rational power series, *Utilitas Mathematica*, 1981, **19**: 247–254.
[2] Zeilberger D., Sister Celine's technique and its generalization, *J. Math. Anal. Appl.*, 1982, **85**: 114–145.
[3] Lipshitz L., The diagonal of a *D*-finite power series is *D*-finite, *Journal of Algebra*, 1988, **113**: 373–378.
[4] Christol G., Diagonales de fractions rationnelles et équations differéntielles, *Group de Travail D'analyse Ultramétrique*, 1982–1983, **10**(2), exp. No 18: 1–10.
[5] Haible B., Stoll M., *D*-finite Power Series and the Diagonal Theorem, Preprint Dated 13 October, 1993.
[6] Stanley R., Differentiably finite power series, *European J. Combinatorics*, 1980, **1**: 175–188.
[7] Furstenberg H., Algebraic functions over finite fields, *J. Algebra*, 1967, **7**: 271–277.