中国科学: 数学 2026 年 第 56 卷 第 ? 期: 1 ∼ 18
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates

多元多项式矩阵的 Smith 标准形等价理论

鲁东[1], 王定康[2,3], 肖方慧[4*], 郑晓鹏[5]

1. 西南交通大学数学学院, 成都 610031;
2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 数学科学全国重点实验室, 北京 100190;
3. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049;
4. 湖南师范大学数学与统计学院, 计算与随机数学教育部重点实验室, 长沙 410081;
5. 汕头大学数学与计算机学院, 汕头 515821

E-mail: donglu@swjtu.edu.cn, dwang@mmrc.iss.ac.cn, xiaofanghui@hunnu.edu.cn, xiaopengzheng@stu.edu.cn

收稿日期: 2025-07-21; 接受日期: 2026-08-06; 网络出版日期: 2026-09-28; * 通信作者
国家自然科学基金重大项目 (批准号: 12494550&12494551)、国家自然科学基金 (批准号: 12171469 和 12201210)、四川省科技计划项目 (批准号: 2024NSFSC0418) 和汕头大学科研启动经费项目 (批准号: NTF24023T) 资助项目

摘要 多元多项式矩阵是符号计算、交换代数和多维系统等领域中的基本研究对象, 与其相关的 Smith 标准形等价理论应用广泛. 本文针对行列式具有特殊结构的一类多元多项式方阵, 通过构建同构映射将其转化为行列式为单变元多项式的方阵, 进而获得原方阵与其 Smith 标准形等价的充分必要条件, 即各阶约化子式均生成单位理想. 此外, 利用 Quillen-Suslin 定理及多项式矩阵零素分解理论, 将该类型方阵的研究推广至秩亏且非方阵情形. 借助 Gröbner 基算法可判定此类多元多项式矩阵是否与其 Smith 标准形等价, 实例验证该等价理论的有效性.

关键词 多元多项式矩阵 Smith 标准形 矩阵等价 Gröbner 基

MSC (2020) 主题分类 68W30, 15A24, 13P10

1 引言

多元多项式矩阵的等价问题作为 Serre 约化问题 [4] 的重要组成部分, 其理论在符号计算、交换代数和多维系统等领域具有广泛应用 (参见文献 [2, 5]). 该问题旨在探究如何将复杂的多元多项式矩阵约化为与之等价的更简形式 (如具有更少的方程数或变元数), 进而更有效地分析原矩阵的性质. 在线性代数中, 通过引入特征多项式矩阵的 Smith 标准形概念 [15], 为数值矩阵的结构分类提供了有效工具. 鉴于 Smith 标准形的重要作用, 人们已开始关注多元多项式矩阵与其 Smith 标准形的等价问题, 期望其理论可推广应用于计算代数几何 [8, 14] 和信号处理 [1, 31] 等领域.

由于单变元多项式环是 Euclid 整环, 借助 Gauss 消元法可将该环上的多项式矩阵约化为 Smith 标准形, 故任意单变元多项式矩阵均与其 Smith 标准形等价. 然而, 当变元个数超过 1 时, 已有诸多反

英文引用格式: Lu D, Wang D K, Xiao F H, et al. The equivalence theory of Smith normal forms for multivariate polynomial matrices (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–18, doi: 10.1360/SSM-2025-0178

© 2026《中国科学》杂志社

例表明, 该情形下的多元多项式矩阵未必与其 Smith 标准形等价. 其本质原因在于, 多元多项式环并非 Euclid 整环, 不具备 Euclid 除法这一良好性质, 这使得多元多项式矩阵与其 Smith 标准形等价问题至今仍是一个具有挑战性的难题.

1978 年, Frost 和 Storey [11] 针对二元多项式矩阵与其 Smith 标准形的等价问题, 首次提出了如下断言: 矩阵与其 Smith 标准形等价的充分必要条件是矩阵的各阶约化子式均生成单位理想. 但随后, 他们通过反例 [12] 表明该断言并不成立. 理论研究表明, 矩阵的各阶约化子式均生成单位理想仅是矩阵与其 Smith 标准形等价的一个必要条件. 因此, 研究者们开始探究当多元多项式矩阵具有何种结构或满足什么性质时, 上述断言能够成立.

当二元多项式方阵的行列式为单变元不可约多项式时, Li 等 [17] 通过模不可约多项式的方法建立从二元多项式环到主理想整环的同态映射, 证明了该类型方阵一定与其 Smith 标准形等价. 原因在于, 此结构隐含各阶约化子式均生成单位理想的性质. Zheng 等 [38] 推广了此类型: 考虑行列式为单变元不可约多项式幂次的二元多项式方阵, 证明了 Frost 和 Storey 的断言在此情形下成立. 随后, Guan 等 [13] 借助 Suslin 稳定性定理 [28] 将文献 [38] 中研究对象的范围扩大至多元情形 (变元个数大于 1 且方阵阶数大于 2). 目前, Lu 等 [26] 在去掉 “不可约” 的约束条件下利用局部化技术证明, 当多元多项式方阵的行列式属于单变元多项式环中的元素时, Frost 和 Storey 的断言是正确的.

2006 年, Lin 等 [22] 研究了如下类型多元多项式矩阵的等价问题: 当 $F \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times l}$ 满足 $\det(F) = x_1 - f(x_2, \ldots, x_n)$ 时, F 与其 Smith 标准形等价, 其中 $f \in K[x_2, \ldots, x_n]$. 在此基础上, Li 等 [19] 借助 Quillen-Suslin 定理证明了满足 $\det(F) = [x_1 - f(x_2, \ldots, x_n)]^t$ 的 $F \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times l}$ 与对角矩阵 $S = \mathrm{diag}\{1, \ldots, 1, \det(F)\}$ 等价的充分必要条件是 $\det(F)$ 与 F 的 $(l-1)\times(l-1)$ 阶子式生成单位理想, 其中 t 是正整数. 根据 Smith 标准形的定义可知, S 是 F 所有可能存在的 Smith 标准形中最为特殊的一个. 随后, Liu 等 [23] 针对上述同样类型的多项式矩阵, 考虑其任意情形下的 Smith 标准形, 给出了 Frost 和 Storey 的断言的正确性证明.

此外, 研究者们在其他结构类型的多元多项式矩阵及相关计算等问题上亦取得若干进展 (参见文献 [3,7,37]). 然而, 该等价问题尚未得到彻底解决. 鉴于多元多项式矩阵与其 Smith 标准形的等价性不具有普遍性, 因此研究具有特殊结构或性质的多元多项式矩阵变得尤为重要. 本文聚焦于某类特殊的多元多项式矩阵, 探究其与 Smith 标准形的等价理论.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节介绍与多项式矩阵等价相关的一些概念与引理. 第 3 节通过两个实例来引出本文的研究对象, 并提出两个等价问题. 第 4 节通过建立两个多项式环之间的同构映射来解决上一节中的等价问题, 并利用一个实例来说明等价理论的有效性. 第 5 节给出本文结论.

2 预备知识

令 K 是一个域, $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 是系数在 K 中且变元为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的多元多项式环, 其中 $n \geqslant 2$ 为正整数. 令 $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times m}$ 表示由元素在 $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 中的所有 $l \times m$ 阶矩阵构成的集合, 其中 l 和 m 为正整数. 已知 $A \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times l}$, $\det(A)$ 表示 A 的行列式; $d_i(A)$ 表示 A 的所有 $i \times i$ 阶子式的最大公因子, 其中 $i = 1, \ldots, l$; 为方便起见, 记 $d_0(A) \equiv 1$. 设 $h_1, \ldots, h_l \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $\gcd(h_1, \ldots, h_l)$ 表示 $h_1, \ldots, h_l$ 的最大公因子; $\mathrm{diag}\{h_1, \ldots, h_l\}$ 表示由 $h_1, \ldots, h_l$ 组成对角线元素的 $l \times l$ 阶对角矩阵.

首先介绍多元多项式矩阵的 Smith 标准形概念.

定义 2.1 已知 $F \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times m}$ 的秩为 r, 其中 $1 \leqslant r \leqslant \min\{l, m\}$. 按如下形式构造 $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 中的多项式 ω_i:

$$\omega_i = \frac{d_i(F)}{d_{i-1}(F)}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

于是, F 的 Smith 标准形为

$$S = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}\{\omega_1, \ldots, \omega_r\} & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(l-r)\times r} & 0_{(l-r)\times(m-r)} \end{pmatrix}.$$

当 $n \geqslant 2$ 时, Li 等 [16] 利用局部化与 p- 指数技术证明了在多元情形下 $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ 仍然满足整除关系: $\omega_1 \mid \omega_2 \mid \cdots \mid \omega_r$. 由此可知, 定义 2.1 是线性代数中特征多项式矩阵的 Smith 标准形概念的自然推广.

接下来, 介绍多元多项式环上一类具有特殊性质的矩阵: 幺模矩阵. 此矩阵常见于交换代数和多维系统等领域.

定义 2.2 已知 $U \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times l}$. 若 $\det(U) \in K \setminus \{0\}$, 则称 U 是一个幺模矩阵.

在定义 2.2 中, 可找到方阵

$$V \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times l}$$

使得 $UV = \boldsymbol{I}_l$, 其中 $\boldsymbol{I}_l$ 是 $l \times l$ 阶单位矩阵. 不妨设

$$U^* \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times l}$$

为 U 的伴随矩阵, 于是 $UU^* = \det(U) \cdot \boldsymbol{I}_l$. 因为 U 是幺模矩阵, 所以 $V = \frac{1}{\det(U)} \cdot U^*$. 由此可见, 定义 2.2 是线性代数中可逆矩阵概念的进一步推广.

借助定义 2.2, 现在给出多元多项式环上多项式矩阵等价与相似的概念.

定义 2.3 已知 $F_1, F_2 \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times m}$. 若存在两个幺模矩阵 $U \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times l}$ 和 $V \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{m\times m}$ 使得 $F_1 = UF_2V$, 则称 F_1 与 F_2 等价.

多项式矩阵等价具有三条基本性质: 反身性、对称性与传递性.

定义 2.4 已知 $A_1, A_2 \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times l}$. 若存在幺模矩阵 $U \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times l}$ 使得 $A_1 = U^{-1}A_2U$, 则称 A_1 与 A_2 相似.

当多项式矩阵具有某些特殊结构时, 矩阵等价可以通过矩阵相似来判断, 即以下引理.

引理 2.1 [5] 已知 $A_1, A_2 \in K[x_2, \ldots, x_n]^{l\times l}$, 则 $x_1 \cdot \boldsymbol{I}_l - A_1$ 与 $x_1 \cdot \boldsymbol{I}_l - A_2$ 在 $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 上等价当且仅当 A_1 与 A_2 在 $K[x_2, \ldots, x_n]$ 上相似.

接下来介绍本文中最重要的一个概念, 它与判断一个多项式矩阵是否与其 Smith 标准形等价的条件密切相关.

定义 2.5 [20] 已知 $F \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times m}$ 的秩为 r, 其中 $1 \leqslant r \leqslant \min\{l, m\}$. 对于任意满足 $1 \leqslant i \leqslant r$ 的正整数 i, 假设 $a_1, \ldots, a_\beta \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 是 F 的所有 $i \times i$ 阶子式, 其中 $\beta = \binom{l}{i}\binom{m}{i}$. 将 $d_i(F)$ 从 $a_1, \ldots, a_\beta$ 中提取出来, 可得 $a_j = d_i(F) \cdot b_j$, 其中 $j = 1, \ldots, \beta$. 于是 $b_1, \ldots, b_\beta \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 被称为 F 的 $i \times i$ 阶约化子式.

为方便起见, 令 $I_i(F)$ 表示由 F 的所有 $i \times i$ 阶子式生成的多项式理想, $J_i(F)$ 表示由 F 的所有 $i \times i$ 阶约化子式生成的多项式理想, 其中 $i = 1, \ldots, r$. 由于多项式矩阵等价具有传递性质, 因此在等价条件下, $d_i(F)$, $I_i(F)$ 和 $J_i(F)$ 是多项式矩阵的不变量, 即如下结论.

引理 2.2 [23] 已知 $F_1, F_2 \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times m}$. 若 F_1 与 F_2 等价, 则有 $d_i(F_1) = d_i(F_2)$, $I_i(F_1) = I_i(F_2)$ 和 $J_i(F_1) = J_i(F_2)$, 其中 $i = 1, \ldots, \min\{l, m\}$.

Lu 等 [26] 在研究行列式为单变元多项式的矩阵与其 Smith 标准形等价问题时, 借助局部化技术和 Quillen-Suslin 定理证明, 通过各阶约化子式生成的多项式理想即可判断该类型矩阵是否与其 Smith 标准形等价.

引理 2.3 [26] 已知 $F \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times l}$ 满足 $\det(F) \in K[x_1]\setminus\{0\}$. 则 F 与其 Smith 标准形等价的充分必要条件是 F 的各阶约化子式均生成单位理想, 即 $J_i(F) = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 对于 $i = 1, \ldots, l$ 均成立.

在引理 2.3 中, 可以通过 Gröbner 基算法 [6] 来判断 F 的各阶约化子式是否生成单位理想. 规定变元 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 之间的大小关系, 并给定 $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 中关于单项式集合的某种项序 $\prec$ [9], 然后计算 $J_i(F)$ 关于 $\prec$ 的约化 Gröbner 基. 若约化 Gröbner 基为 $\{1\}$, 则说明 $J_i(F) = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$; 否则不是. 关于 Gröbner 基算法方面的进展, 感兴趣的读者可参见文献 [10, 27].

Youla 和 Gnavi [36] 在研究多项式矩阵在多维系统中的应用时, 提出了如下概念.

定义 2.6 [36] 已知 $A \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times m}$ 是一个行满秩多项式矩阵, 其中 $l \leqslant m$. 若 $I_l(A) = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, 则称 A 是一个零左素矩阵. 类似地, 当 $A \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{m\times l}$ 时, 可定义零右素矩阵.

在定义 2.6 中, 若 $l = m$, 则零左 (右) 素矩阵即为幺模矩阵. 容易验证一个多项式矩阵是否为零左素矩阵. 已知 $A \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times m}$, 其中 $l \leqslant m$. 计算 A 的所有 $l \times l$ 阶子式, 若全部为零, 则说明 A 秩亏, 不满足定义 2.6 的条件, 从而不是零左素矩阵. 若存在不为零的 $l \times l$ 阶子式, 则计算它们关于某种单项式序的约化 Gröbner 基 G. 若 $G = \{1\}$, 则说明 $I_l(A) = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, 从而 A 是零左素矩阵; 否则不是.

例 2.1 已知

$$A = \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 + 2 & 1 & \frac{1}{2}x_1(x_1 + x_2 - 2) \\ -2x_1x_2 & 0 & x_1^2x_2 + 1 \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{Q}[x_1, x_2]^{2\times 3}$ 中的多项式矩阵, 其中 $\mathbb{Q}$ 是有理数域.

经计算, A 的所有 2×2 阶子式分别为 $2x_1x_2$, $x_1^2x_2 + 1$ 和 $-x_1 - x_2 + 2$. 于是,

$$I_2(A) = \langle 2x_1x_2, x_1^2x_2 + 1, -x_1 - x_2 + 2\rangle.$$

令 $x_1 > x_2$ 且 $\prec$ 是 $\mathbb{Q}[x_1, x_2]$ 中关于单项式集合的字典序. 计算 $I_2(A)$ 关于 $\prec$ 的约化 Gröbner 基 G, 可得 $G = \{1\}$. 因此, A 是一个零左素矩阵.

Quillen [30] 和 Suslin [34] 独立解决了 Serre 猜想 [32], 从而建立了零素矩阵与幺模矩阵之间的联系, 此联系在后续的研究中被称为 Quillen-Suslin 定理.

引理 2.4 (Quillen-Suslin 定理) 已知 $A \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times m}$ 是零左素矩阵, 其中 $l \leqslant m$. 则存在幺模矩阵 $V \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{m\times m}$ 使得 $AV = (\boldsymbol{I}_l, 0_{l\times(m-l)})$.

2001 年, Lin 和 Bose [21] 在研究 Serre 猜想的推广时, 提出如下猜想: 若行满秩多项式矩阵 $F \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times m}$ 满足 $J_l(F) = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, 则 F 存在一个零左素分解, 其中 $l \leqslant m$. 该猜想被称为 Lin-Bose 猜想, 随后 Liu 等 [24], Pommaret [29], Srinivas [33], Wang 和 Feng [35] 分别运用不同的方法解决了此猜想, 其中 Wang 和 Feng [35] 将 Lin-Bose 猜想推广至秩亏情形.

引理 2.5 [35] 已知 $F \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times m}$ 的秩为 r, 且 $J_r(F) = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, 其中 $1 \leqslant r \leqslant \min\{l, m\}$. 则存在 $G_1 \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times r}$ 和 $F_1 \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{r\times m}$ 使得

$$F = G_1F_1, \tag{2.1}$$

其中 F_1 是一个零左素矩阵. 此时, (2.1) 被称为 F 的零左素分解.

若引理 2.5 中的 G_1 为零右素矩阵, 则 (2.1) 被称为 F 的零右素分解.

3 矩阵等价问题

2022 年, Li 等 [18] 尝试证明了如下命题: 已知 $F \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times l}$ 的行列式为

$$\det(F) = (x_1 - f_1(x_2, \ldots, x_n)) \cdot (x_1 - f_2(x_2, \ldots, x_n)),$$

其中 $f_1, f_2 \in K[x_2, \ldots, x_n]$ 互不相同, 则 F 与其 Smith 标准形等价的充分必要条件是 F 的各阶约化子式均生成单位理想. 在探索的过程中, Li 等 [18] 构造了一个反例用以说明上述命题在一般情形下并不成立. 随后, 2023 年 Liu 等 [25] 考虑了如下类型的上三角多项式矩阵:

$$F = \begin{pmatrix} x_1 - f(x_2, \ldots, x_n) - c_1 & f_{12}(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \cdots & f_{1l}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ & x_1 - f(x_2, \ldots, x_n) - c_2 & \cdots & f_{2l}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & x_1 - f(x_2, \ldots, x_n) - c_l \end{pmatrix},$$

其中 $c_1, c_2, \ldots, c_l \in K$ 互不相同. 易验证 F 的各阶约化子式均生成单位理想. 借助引理 2.1 和多元多项式环中的多项式带余除法, Liu 等 [25] 证明了 F 与其 Smith 标准形等价. 本文研究发现, 当上述 $c_1, c_2, \ldots, c_l$ 存在相同元素时, 仍有实例表明 F 与其 Smith 标准形等价.

例 3.1 已知

$$F_1 = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - 1 & 1 & 4x_2 - 12 \\ 0 & x_1 - x_2 - 1 & 3x_2^2 - 3x_2 + 16 \\ 0 & 0 & x_1 - x_2 + 2 \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{Q}[x_1, x_2]^{3\times 3}$ 中的上三角矩阵, 其中 $\mathbb{Q}$ 是有理数域, $x_1 > x_2$ 且 $\prec$ 是字典序. 在此例中, $f(x_2) = x_2$, $c_1 = c_2 = 1$ 且 $c_3 = -2$.

由于 F_1 的 1×1 阶子式中存在元素 1, 因此 $d_1(F_1) = 1$ 且 $J_1(F_1) = I_1(F_1) = \mathbb{Q}[x_1, x_2]$. F_1 的所有 2×2 阶子式分别为 $(x_1 - x_2 - 1)^2$, $(x_1 - x_2 - 1)(3x_2^2 - 3x_2 + 16)$, $-4x_1x_2 + 12x_1 + 7x_2^2 - 11x_2 + 4$, $(x_1 - x_2 - 1)(x_1 - x_2 + 2)$ 和 $x_1 - x_2 + 2$. 计算可得 $d_2(F_1) = 1$, 于是 $J_2(F_1) = I_2(F_1)$. 经验证, $J_2(F_1)$ 关于 $\prec$ 的约化 Gröbner 基为 $\{1\}$, 这表明 $J_2(F_1) = \mathbb{Q}[x_1, x_2]$. 又由于 F_1 是方阵, 因此 $J_3(F_1) = \mathbb{Q}[x_1, x_2]$. 综上可知, F_1 的各阶约化子式均生成单位理想, 且 F_1 的 Smith 标准形为

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (x_1 - x_2 - 1)^2(x_1 - x_2 + 2) \end{pmatrix}.$$

接下来, 证明 F_1 与 S 等价.

令

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_2+1 & -1 & -4x_2+12 \\ 0 & x_2+1 & -3x_2^2+3x_2-16 \\ 0 & 0 & x_2-2 \end{pmatrix},$$

则 $F_1 = x_1 \cdot \boldsymbol{I}_3 - A_1$. 构造如下多项式矩阵:

$$A_2 = \begin{pmatrix} x_2+1 & -1 & 0 \\ 0 & x_2+1 & -1 \\ 0 & 0 & x_2-2 \end{pmatrix},$$

且令 $F_2 = x_1 \cdot \boldsymbol{I}_3 - A_2$, 于是

$$F_2 = \begin{pmatrix} x_1-x_2-1 & 1 & 0 \\ 0 & x_1-x_2-1 & 1 \\ 0 & 0 & x_1-x_2+2 \end{pmatrix}.$$

令

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x_1+x_2+1 & 1 & 0 \\ (x_1-x_2-1)(x_1-x_2+2) & -x_1+x_2-2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -x_1+x_2+1 \\ 0 & 1 & (x_1-x_2-1)^2 \end{pmatrix},$$

计算可得 $\det(U) = \det(V) = 1$, 这表明 $U, V \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]^{3\times 3}$ 均为幺模矩阵. 经验证, 有 $U \cdot F_2 \cdot V = S$, 即 F_2 与 S 等价. 若能证明 F_1 与 F_2 等价, 则根据等价的传递性质可知 F_1 与 S 等价. 由引理 2.1 可知, F_1 与 F_2 在 $\mathbb{Q}[x_1, x_2]$ 上等价的充分必要条件是 A_1 与 A_2 在 $\mathbb{Q}[x_2]$ 上相似. 不妨假设 $W = (w_{ij})_{3\times 3} \in \mathbb{Q}[x_2]^{3\times 3}$ 为幺模矩阵, 且满足

$$W^{-1} \cdot A_1 \cdot W = A_2.$$

由 $A_1 \cdot W = W \cdot A_2$ 可得如下方程组:

$$\begin{cases} w_{11} = w_{22}, \\ w_{21} = w_{31} = w_{32} = 0, \\ 3w_{13} + w_{12} - w_{23} + w_{33}(-4x_2+12) = 0, \\ 3w_{23} + w_{22} + w_{33}(-3x_2^2+3x_2-16) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

由 (3.1) 可知, W 是一个上三角方阵. 因为 $\det(W) = 1$, 所以可取

$$w_{11} = w_{22} = w_{33} = 1. \tag{3.2}$$

联立 (3.1) 和 (3.2) 可得

$$\begin{cases} 3w_{13}+w_{12}-w_{23}-4x_2+12=0, \\ 3w_{23}-3x_2^2+3x_2-15=0. \end{cases}$$

于是, $w_{23}=x_2^2-x_2+5$ 且 $w_{12}+3w_{13}=x_2^2+3x_2-7$. 令 $w_{12}=x_2^2+2$, 则 $w_{13}=x_2-3$. 经上述计算, 找到 $\mathbb{Q}[x_2]^{3\times 3}$ 中的一个幺模矩阵 W 满足 $W^{-1}\cdot A_1\cdot W=A_2$, 其取值为

$$W=\begin{pmatrix} 1 & x_2^2+2 & x_2-3 \\ 0 & 1 & x_2^2-x_2+5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

从而, F_1 与其 Smith 标准形等价.

本文在进一步的研究过程中发现, 存在非上三角多项式方阵在满足行列式具有类似于文献 [25] 中的特殊形式时, 也与其 Smith 标准形等价, 如例 3.2 所示.

例 3.2 已知 $F=(f_{ij})_{2\times 2}\in\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3,x_4]^{2\times 2}$ 且 $\mathbb{Q}$ 是有理数域, 其中

$$\begin{cases} f_{11}=x_1x_4-x_2^3x_4-x_3x_4^2+1, \\ f_{12}=x_1^2-2x_1x_2^3-2x_1x_3x_4+x_1+x_2^6+2x_2^3x_3x_4-x_2^3+x_3^2x_4^2-x_3x_4, \\ f_{21}=x_1x_4-x_2^3x_4-x_3x_4^2-x_4, \\ f_{22}=x_1^2-2x_1x_2^3-2x_1x_3x_4+x_2^6+2x_2^3x_3x_4+x_3^2x_4^2-1. \end{cases}$$

此时 F 不是上三角矩阵, 计算可得 $\det(F)=(x_1-x_2^3-x_3x_4-1)(x_1-x_2^3-x_3x_4+1)$, $d_1(F)=1$ 且 $d_2(F)=\det(F)$. 于是, F 的 Smith 标准形为

$$S=\begin{pmatrix} 1 & \\ & (x_1-x_2^3-x_3x_4-1)(x_1-x_2^3-x_3x_4+1) \end{pmatrix}.$$

因为 $d_1(F)=1$, 所以 F 的所有 1×1 阶约化子式分别为 f_{11},f_{12},f_{21} 和 f_{22}. 令 $x_1>x_2>x_3>x_4$, 且 $\prec$ 是字典序. 计算可得, $J_1(F)$ 关于 $\prec$ 的约化 Gröbner 基为 $\{1\}$, 这表明 $J_1(F)=\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3,x_4]$. 由于 F 的 2×2 阶约化子式只有一个且为 1, 则有 $J_2(F)=\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3,x_4]$, 因此 F 的各阶约化子式均生成单位理想. 为方便起见, 记 $h(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1-x_2^3-x_3x_4$. 构造如下两个方阵:

$$U=\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}(h^2-h)x_4 & -\frac{1}{2}h^2x_4 \\ \frac{1}{2}(h-1)^2x_4 & 1+\frac{1}{2}(-h^2+h)x_4 \end{pmatrix} \quad 和 \quad V=\begin{pmatrix} 1 & -h^2-h \\ -\frac{1}{2}x_4 & 1+\frac{1}{2}(h^2+h)x_4 \end{pmatrix},$$

计算行列式可得 $\det(U)=\det(V)=1$, 这表明 $U,V\in\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3,x_4]^{2\times 2}$ 均是幺模矩阵. 经验证可得

$$U\cdot F\cdot V=S,$$

这表明 F 与其 Smith 标准形等价.

基于例 3.1 和 3.2, 本文提出如下问题.

问题 3.1 已知 $F \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times l}$ 满足 $\det(F) = \prod_{i=1}^{t}[x_1 - f(x_2, \ldots, x_n) - c_i]^{s_i}$, 其中 $t, s_1, \ldots, s_t$ 为正整数, $f \in K[x_2, \ldots, x_n]$ 且 $c_1, \ldots, c_t \in K$ 互不相同. 问: F 与其 Smith 标准形等价的充分必要条件是否为 F 的各阶约化子式均生成单位理想?

注 3.1 在文献 [25] 中, 研究对象为上三角方阵, 其行列式为无平方多项式, 由此可知其 Smith 标准形具有如下特殊形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & [x_1 - f(x_2, \ldots, x_n) - c_1]\cdots[x_1 - f(x_2, \ldots, x_n) - c_l] \end{pmatrix}.$$

与文献 [25] 相比, 问题 3.1 中研究的多项式矩阵更为广泛: 首先, 方阵的行列式可包含重因子; 其次, 研究对象可以是除上三角方阵的其他方阵. 这使得方阵的 Smith 标准形为如下形式:

$$\begin{pmatrix} \prod_{i=1}^{t}[x_1-f(x_2,\ldots,x_n)-c_i]^{s_{1i}} & & & \\ & \prod_{i=1}^{t}[x_1-f(x_2,\ldots,x_n)-c_i]^{s_{2i}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \prod_{i=1}^{t}[x_1-f(x_2,\ldots,x_n)-c_i]^{s_{li}} \end{pmatrix},$$

其中 $(s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_{jt}) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{t}$, $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 表示非负整数构成的集合, $j = 1, \ldots, l$; 此外, $s_{1i} \leqslant s_{2i} \leqslant \cdots \leqslant s_{li}$ 且 $\sum_{j=1}^{l} s_{ji} = s_i$, $i = 1, \ldots, t$.

问题 3.1 中, F 是一个满秩的方阵. 在理论研究与实际应用中, 秩亏且非方阵情形下的多项式矩阵是更为常见的研究对象, 因此本文在问题 3.1 的基础上提出另一个更具一般性的问题.

问题 3.2 已知 $F \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times m}$ 的秩为 r, 其中 $1 \leqslant r \leqslant \min\{l, m\}$. 假设 $d_r(F) = \prod_{i=1}^{t}[x_1 - f(x_2, \ldots, x_n) - c_i]^{s_i}$, 其中 $t, s_1, \ldots, s_t$ 为正整数, $f \in K[x_2, \ldots, x_n]$ 且 $c_1, \ldots, c_t \in K$ 互不相同. 问: F 与其 Smith 标准形等价的充分必要条件是否为 $J_i(F) = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 对于 $i = 1, \ldots, r$ 均成立?

4 矩阵等价理论

本节首先通过建立两个多元多项式环之间的同构映射, 将问题 3.1 中的研究对象转化为行列式是单变元多项式的情形, 再利用引理 2.3 给出理论证明, 从而达到解决问题 3.1 的目的. 其次, 运用 Quillen-Suslin 定理和多项式矩阵零素分解理论研究秩亏且非方阵情形, 从而完全解决问题 3.2. 最后, 通过一个实例来说明等价理论的有效性.

定义 4.1 引入不同于 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的新变元 z, 对任意给定的多项式 $f \in K[x_2, \ldots, x_n]$, 定义如下映射:

$$\begin{aligned} \phi_f : K[x_1, x_2, \ldots, x_n] &\to K[z, x_2, \ldots, x_n], \\ h(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\mapsto h(z + f, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

其中 $h \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

引理 4.1 定义 4.1 中的 ϕ_f 是一个同构映射.

证明 对于 $K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ 中的任意多项式, 可将其视作 $K[x_2,\ldots,x_n][x_1]$ 中的元素. 不妨设 $h\in K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ 关于 x_1 的次数为 s, 其中 s 为非负整数, 于是 h 可写成如下形式:

$$h=a_0+a_1\cdot x_1+\cdots+a_{s-1}\cdot x_1^{s-1}+a_s\cdot x_1^s, \tag{4.1}$$

其中 $a_0,a_1,\ldots,a_{s-1},a_s\in K[x_2,\ldots,x_n]$.

对于任意的 $h_1,h_2\in K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, 不妨设 h_1 和 h_2 关于 x_1 的次数分别为 s_1 和 s_2, 其中 s_1 和 s_2 均为非负整数. 基于 (4.1) 的表示形式, h_1 和 h_2 可分别表示如下:

$$h_1=\sum_{i=0}^{s_1}a_{1i}\cdot x_1^i \quad 和 \quad h_2=\sum_{j=0}^{s_2}a_{2j}\cdot x_1^j,$$

其中 $a_{10},a_{11},\ldots,a_{1s_1},a_{20},a_{21},\ldots,a_{2s_2}\in K[x_2,\ldots,x_n]$.

接下来, 依次验证 ϕ_f 是一个环同态、单射和满射.

因为

$$\begin{aligned}\phi_f(h_1+h_2)&=\phi_f\left(\sum_{i=0}^{s_1}a_{1i}\cdot x_1^i+\sum_{j=0}^{s_2}a_{2j}\cdot x_1^j\right)\\&=\sum_{i=0}^{s_1}a_{1i}\cdot(z+f)^i+\sum_{j=0}^{s_2}a_{2j}\cdot(z+f)^j \quad (由\ \phi_f\ 的定义保证此处等式成立)\\&=\phi_f(h_1)+\phi_f(h_2),\end{aligned}$$

所以 ϕ_f 保持环的加法运算. 由于

$$\begin{aligned}\phi_f(h_1\cdot h_2)&=\phi_f\left(\left(\sum_{i=0}^{s_1}a_{1i}\cdot x_1^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{s_2}a_{2j}\cdot x_1^j\right)\right)\\&=\phi_f(a_{10}a_{20}+(a_{10}a_{21}+a_{11}a_{20})\cdot x_1+\cdots+(a_{1s_1}a_{2s_2})\cdot x_1^{s_1+s_2})\\&=a_{10}a_{20}+(a_{10}a_{21}+a_{11}a_{20})\cdot(z+f)+\cdots+(a_{1s_1}a_{2s_2})\cdot(z+f)^{s_1+s_2}\\&=\left(\sum_{i=0}^{s_1}a_{1i}\cdot(z+f)^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{s_2}a_{2j}\cdot(z+f)^j\right)\\&=\phi_f(h_1)\cdot\phi_f(h_2),\end{aligned}$$

从而 ϕ_f 保持环的乘法运算. 又因 $\phi_f(1)=1$, 即 ϕ_f 保持单位元映射, 于是 ϕ_f 是一个环同态.

若 $\phi_f(h_1)=\phi_f(h_2)$, 则有

$$\sum_{i=0}^{s_1}a_{1i}\cdot(z+f)^i=\sum_{j=0}^{s_2}a_{2j}\cdot(z+f)^j. \tag{4.2}$$

不妨设 $s_1\leqslant s_2$, 由 (4.2) 可得

$$\sum_{j=0}^{s_1}(a_{2j}-a_{1j})\cdot(z+f)^j+\sum_{j=s_1+1}^{s_2}a_{2j}\cdot(z+f)^j=0. \tag{4.3}$$

因为 (4.3) 的等号右边是零多项式, 所以有

$$a_{2j}=\begin{cases}a_{1j}, & j=0,\ldots,s_1,\\ 0, & j=s_1+1,\ldots,s_2.\end{cases}$$

这表明 $h_1=h_2$, 即 ϕ_f 是单射.

对于 $K[z,x_2,\ldots,x_n]$ 中任意给定的多项式 $g(z,x_2,\ldots,x_n)$, 不妨假设 g 关于 z 的次数是 s_3, 其中 s_3 为非负整数. 记 g 为如下形式:

$$g=b_0+b_1\cdot z+\cdots+b_{s_3-1}\cdot z^{s_3-1}+b_{s_3}\cdot z^{s_3}, \tag{4.4}$$

其中 $b_0,b_1,\ldots,b_{s_3}\in K[x_2,\ldots,x_n]$. 将 (4.4) 中的 z 改写为 $(z+f)-f$, 得到

$$\begin{aligned}g&=b_0+b_1\cdot[(z+f)-f]+\cdots+b_{s_3-1}\cdot[(z+f)-f]^{s_3-1}+b_{s_3}\cdot[(z+f)-f]^{s_3}\\&=\sum_{i=0}^{s_3}\left\{\left(\sum_{j=i}^{s_3}\binom{j}{i}b_j(-f)^{j-i}\right)\cdot(z+f)^i\right\}.\end{aligned}$$

令 $e_i=\sum_{j=i}^{s_3}\binom{j}{i}b_j(-f)^{j-i}$, 则 $e_i\in K[x_2,\ldots,x_n]$, 其中 $i=0,1,\ldots,s_3$. 令

$$g'=e_0+e_1\cdot x_1+\cdots+e_{s_3-1}\cdot x_1^{s_3-1}+e_{s_3}\cdot x_1^{s_3},$$

则 $g'\in K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$. 于是,

$$\phi_f(g')=e_0+e_1\cdot(z+f)+\cdots+e_{s_3-1}\cdot(z+f)^{s_3-1}+e_{s_3}\cdot(z+f)^{s_3}=g,$$

这表明 ϕ_f 是满射. 引理得证. □

由于 ϕ_f 是一个同构映射, 因此 ϕ_f 存在逆映射 ϕ_f^{-1}, 并且为

$$\begin{aligned}\phi_f^{-1}:\ &K[z,x_2,\ldots,x_n]\to K[x_1,x_2,\ldots,x_n],\\&g(z,x_2,\ldots,x_n)\mapsto g(x_1-f,x_2,\ldots,x_n),\end{aligned}$$

其中 $g\in K[z,x_2,\ldots,x_n]$.

已知 $F=(f_{ij})_{l\times l}\in K[x_1,x_2,\ldots,x_n]^{l\times l}$, 通过对 F 每一个位置的元素依次作用 ϕ_f, 则 ϕ_f 可以典范延拓为如下同构映射:

$$\begin{aligned}\phi_f:\ &K[x_1,x_2,\ldots,x_n]^{l\times l}\to K[z,x_2,\ldots,x_n]^{l\times l},\\&(f_{ij})_{l\times l}\mapsto(\phi_f(f_{ij}))_{l\times l}.\end{aligned}$$

引理 4.2 已知 $F\in K[x_1,x_2,\ldots,x_n]^{l\times l}$ 且 ϕ_f 是定义 4.1 中的映射, 则

$$\det(\phi_f(F))=\phi_f(\det(F)).$$

证明 不妨设 $F=(f_{ij})_{l\times l}\in K[x_1,x_2,\ldots,x_n]^{l\times l}$. 由行列式的定义可知

$$\det(\phi_f(F))=\sum_{j_1j_2\cdots j_l}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_l)}\phi_f(f_{1j_1})\phi_f(f_{2j_2})\cdots\phi_f(f_{lj_l}),$$

其中 $\tau(j_1j_2\cdots j_l)$ 是关于排列 $j_1j_2\cdots j_l$ 的逆序数. 由引理 4.1 可知 ϕ_f 是同态映射, 因此

$$\det(\phi_f(F))=\phi_f\Big(\sum_{j_1j_2\cdots j_l}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_l)}f_{1j_1}f_{2j_2}\cdots f_{lj_l}\Big)=\phi_f(\det(F)),$$

从而引理得证. □

引理 4.3 已知 ϕ_f 是定义 4.1 中的映射, $F\in K[x_1,x_2,\ldots,x_n]^{l\times l}$ 的秩为 r, 其中 $1\leqslant r\leqslant l$. 若对于任意满足 $1\leqslant i\leqslant r$ 的正整数 i 均有 $J_i(F)=K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, 则有 $J_i(\phi_f(F))=K[z,x_2,\ldots,x_n]$ 且 $d_i(\phi_f(F))=\phi_f(d_i(F))$, 其中 $i=1,\ldots,r$.

证明 对于任意给定的正整数 i_0 且满足 $1\leqslant i_0\leqslant r$, 假设 $a_1,\ldots,a_\beta\in K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ 为 F 的 $i_0\times i_0$ 阶子式, $b_1,\ldots,b_\beta\in K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ 为 F 的 $i_0\times i_0$ 阶约化子式, 于是有

$$a_j=d_{i_0}(F)\cdot b_j,\quad j=1,\ldots,\beta. \tag{4.5}$$

由引理 4.1 可知 ϕ_f 是同态映射, 因此将 ϕ_f 作用在 (4.5) 上可得

$$\phi_f(a_j)=\phi_f(d_{i_0}(F))\cdot\phi_f(b_j),\quad j=1,\ldots,\beta. \tag{4.6}$$

又由引理 4.2 可得 $\phi_f(a_1),\phi_f(a_2),\ldots,\phi_f(a_\beta)\in K[z,x_2,\ldots,x_n]$ 为 $\phi_f(F)$ 的 $i_0\times i_0$ 阶子式. 因为 $J_{i_0}(F)=K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, 所以存在 $p_1,p_2,\ldots,p_\beta\in K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ 使得

$$p_1b_1+p_2b_2+\cdots+p_\beta b_\beta=1. \tag{4.7}$$

于是, 将 ϕ_f 作用在 (4.7) 上可得

$$\phi_f(p_1)\phi_f(b_1)+\phi_f(p_2)\phi_f(b_2)+\cdots+\phi_f(p_\beta)\phi_f(b_\beta)=\phi_f(1)=1. \tag{4.8}$$

这表明

$$\gcd(\phi_f(b_1),\phi_f(b_2),\ldots,\phi_f(b_\beta))=1.$$

结合 (4.6) 可知

$$\phi_f(b_1),\phi_f(b_2),\ldots,\phi_f(b_\beta)\in K[z,x_2,\ldots,x_n]$$

为 $\phi_f(F)$ 的 $i_0\times i_0$ 阶约化子式. 此外, 由 (4.8) 可得

$$J_{i_0}(\phi_f(F))=K[z,x_2,\ldots,x_n]\quad 且\quad d_{i_0}(\phi_f(F))=\phi_f(d_{i_0}(F)).$$

引理得证. □

定理 4.1 已知 $F\in K[x_1,x_2,\ldots,x_n]^{l\times l}$ 满足 $\det(F)=\prod_{i=1}^t[x_1-f(x_2,\ldots,x_n)-c_i]^{s_i}$, 其中 $t,s_1,\ldots,s_t$ 为正整数, $f\in K[x_2,\ldots,x_n]$ 且 $c_1,\ldots,c_t\in K$ 互不相同. 则 F 与其 Smith 标准形等价的充分必要条件是 F 的各阶约化子式均生成单位理想.

证明 **必要性** 不妨设 F 的 Smith 标准形为 S, 易验证 $J_i(S)=K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, 其中 $i=1,\ldots,l$. 若 F 与其 Smith 标准形 S 等价, 根据引理 2.2 可得

$$J_i(F)=J_i(S)=K[x_1,x_2,\ldots,x_n],\quad i=1,\ldots,l.$$

从而, F 的各阶约化子式均生成单位理想.

充分性 令 ϕ_f 是定义 4.1 中的映射, 则由引理 4.1 可知 ϕ_f 是同构映射. 因为

$$\det(F)=\prod_{i=1}^{t}[x_1-f(x_2,\ldots,x_n)-c_i]^{s_i},$$

所以由引理 4.2 有

$$\det(\phi_f(F))=\phi_f(\det(F))=\prod_{i=1}^{t}(z-c_i)^{s_i}. \tag{4.9}$$

由 (4.9) 可知 $\det(\phi_f(F))\in K[z]\setminus\{0\}$. 因为 F 的各阶约化子式生成单位理想, 由引理 4.3 可得

$$J_i(\phi_f(F))=K[z,x_2,\ldots,x_n]\quad 且\quad d_i(\phi_f(F))=\phi_f(d_i(F)),\quad i=1,\ldots,l.$$

根据引理 2.3, 可知 $\phi_f(F)$ 与其 Smith 标准形 S' 等价. 于是, 存在幺模矩阵 $U',V'\in K[z,x_2,\ldots,x_n]^{l\times l}$ 使得

$$S'=U'\cdot\phi_f(F)\cdot V'. \tag{4.10}$$

不妨设 $\phi_f(F)$ 的 Smith 标准形为

$$S'=\operatorname{diag}\{\omega_1',\omega_2',\ldots,\omega_l'\},$$

其中 $\omega_1',\omega_2',\ldots,\omega_l'\in K[z,x_2,\ldots,x_n]$ 满足如下关系:

$$\omega_i'=\frac{d_i(\phi_f(F))}{d_{i-1}(\phi_f(F))},\quad i=1,\ldots,l. \tag{4.11}$$

将 (4.11) 通分, 并结合 $d_i(\phi_f(F))=\phi_f(d_i(F))$ 可得

$$\phi_f(d_i(F))=\phi_f(d_{i-1}(F))\cdot\omega_i',\quad i=1,\ldots,l. \tag{4.12}$$

由于 ϕ_f 是同构映射, 将其逆映射 ϕ_f^{-1} 作用在 (4.12) 上, 可得

$$d_i(F)=d_{i-1}(F)\cdot\phi_f^{-1}(\omega_i'),\quad i=1,\ldots,l. \tag{4.13}$$

因为 $d_i(F)\mid\det(F)$, 所以 $d_i(F)\neq 0$ 对于 $i=1,\ldots,l$ 均成立. 因此, 由 (4.13) 可得

$$\phi_f^{-1}(\omega_i')=\frac{d_i(F)}{d_{i-1}(F)},\quad i=1,\ldots,l. \tag{4.14}$$

由 (4.14) 可知

$$\phi_f^{-1}(S')=\operatorname{diag}\{\phi_f^{-1}(\omega_1'),\phi_f^{-1}(\omega_2'),\ldots,\phi_f^{-1}(\omega_l')\}$$

为 F 的 Smith 标准形. 依据引理 4.2, 同理可验证

$$\det(\phi_f^{-1}(U'))=\phi_f^{-1}(\det(U'))\quad 且\quad \det(\phi_f^{-1}(V'))=\phi_f^{-1}(\det(V')).$$

由于 U' 和 V' 是幺模矩阵, 因此 $\phi_f^{-1}(U')$ 和 $\phi_f^{-1}(V')$ 均为 $K[x_1,x_2,\ldots,x_n]^{l\times l}$ 中的幺模矩阵. 将 ϕ_f^{-1} 作用在 (4.10) 上, 可得

$$\phi_f^{-1}(S')=\phi_f^{-1}(U')\cdot F\cdot\phi_f^{-1}(V'), \tag{4.15}$$

即 F 与其 Smith 标准形等价. 定理得证. □

推论 4.1 已知 $F \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times m}$ 的秩为 r, 其中 $1 \leqslant r \leqslant \min\{l, m\}$. 假设 $d_r(F) = \prod_{i=1}^{t}[x_1 - f(x_2, \ldots, x_n) - c_i]^{s_i}$, 其中 $t, s_1, \ldots, s_t$ 为正整数, $f \in K[x_2, \ldots, x_n]$ 且 $c_1, \ldots, c_t \in K$ 互不相同. 则 F 与其 Smith 标准形等价的充分必要条件是 $J_i(F) = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 对于 $i = 1, \ldots, r$ 均成立.

证明 **必要性** 不妨设 F 的 Smith 标准形为 S, 易验证 $J_i(S) = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, 其中 $i = 1, \ldots, r$. 若 F 与其 Smith 标准形 S 等价, 根据引理 2.2 可得

$$J_i(F) = J_i(S) = K[x_1, x_2, \ldots, x_n], \quad i = 1, \ldots, r.$$

从而, F 的各阶约化子式均生成单位理想.

充分性 因为 $J_r(F) = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, 所以由引理 2.5 可知, 存在

$$G_1 \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times r}, \quad F_1 \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{r\times m}$$

使得

$$F = G_1F_1, \tag{4.16}$$

其中 F_1 是一个零左素矩阵. 根据 Quillen-Suslin 定理可知, 存在幺模矩阵

$$V \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{m\times m}$$

使得

$$F_1V = (\boldsymbol{I}_r, 0_{r\times(m-r)}). \tag{4.17}$$

联立 (4.16) 和 (4.17), 可得

$$FV = (G_1, 0_{l\times(m-r)}). \tag{4.18}$$

由于 V 是幺模矩阵, 则 (4.18) 表明 F 与 $(G_1, 0_{l\times(m-r)})$ 等价. 又基于引理 2.2 可得

$$J_r(G_1) = J_r(F) = K[x_1, x_2, \ldots, x_n].$$

由引理 2.5 可知, 存在

$$G_2 \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times r}$$

和

$$G_3 \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{r\times r}$$

使得

$$G_1 = G_2G_3, \tag{4.19}$$

其中 G_2 是一个零右素矩阵. 再次运用 Quillen-Suslin 定理, 存在幺模矩阵

$$U \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times l}$$

使得

$$UG_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r \\ 0_{(l-r)\times r} \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

联立 (4.18)–(4.20), 可得

$$UFV = \begin{pmatrix} G_3 & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(l-r)\times r} & 0_{(l-r)\times(m-r)} \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

于是, 由引理 2.2 可得

$$d_i(G_3) = d_i(F) \quad 且 \quad J_i(G_3) = J_i(F) = K[x_1, x_2, \ldots, x_n], \quad i = 1, \ldots, r.$$

根据定理 4.1 可知, 存在幺模矩阵

$$U_1, V_1 \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{r\times r}$$

使得

$$U_1 G_3 V_1 = \mathrm{diag}\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}, \tag{4.22}$$

其中

$$\omega_i = \frac{d_i(G_3)}{d_{i-1}(G_3)} = \frac{d_i(F)}{d_{i-1}(F)}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

令

$$U_2 = \begin{pmatrix} U_1 & \\ & \boldsymbol{I}_{l-r} \end{pmatrix} \quad 且 \quad V_2 = \begin{pmatrix} V_1 & \\ & \boldsymbol{I}_{m-r} \end{pmatrix},$$

则 U_2 和 V_2 均是幺模矩阵. 将 U_2 和 V_2 代入 (4.21) 并结合 (4.22), 可得

$$U_2 UFV V_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}\left\{\frac{d_1(F)}{d_0(F)}, \frac{d_2(F)}{d_1(F)}, \ldots, \frac{d_r(F)}{d_{r-1}(F)}\right\} & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(l-r)\times r} & 0_{(l-r)\times(m-r)} \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

(4.23) 表明 F 与其 Smith 标准形等价. 推论得证. □

基于定理 4.1 和推论 4.1, 本文解决了问题 3.1 和 3.2. 现针对如下实例, 通过本文提出的等价理论来说明它是如何与其 Smith 标准形等价的.

例 4.1 已知

$$F = \begin{pmatrix} 1-(x_1-x_2^2+x_3)x_2 & (-x_1+x_2^2-x_3+2)x_2 \\ (x_1-x_2^2+x_3)(x_1-x_2^2+x_3+1)^2 & (x_1-x_2^2+x_3+1)^2(x_1-x_2^2+x_3-2) \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]^{2\times 2}$ 中的矩阵, 其中 $\mathbb{Q}$ 是有理数域, $x_1 > x_2 > x_3$ 且 $\prec$ 是字典序.

计算 F 的行列式可得

$$\det(F) = (x_1-x_2^2+x_3+1)^2(x_1-x_2^2+x_3-2).$$

令

$$f(x_2,x_3)=x_2^2-x_3,$$

于是

$$\det(F)=(x_1-f(x_2,x_3)+1)^2(x_1-f(x_2,x_3)-2)$$

符合定理 4.1 的矩阵类型.

F 的 1×1 阶子式分别为 $F[1,1],F[1,2],F[2,1]$ 和 $F[2,2]$, 其中 $F[i,j]$ 表示 F 的第 i 行第 j 列位置的元素, $1\leqslant i,j\leqslant 2$. 计算可得 $d_1(F)=1$, 这表明

$$J_1(F)=I_1(F)=\langle F[1,1],F[1,2],F[2,1],F[2,2]\rangle.$$

计算 $J_1(F)$ 关于 $\prec$ 的约化 Gröbner 基 G, 可得 $G=\{1\}$, 于是 $J_1(F)=\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]$. 由于

$$J_2(F)=\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3],$$

这说明 F 的各阶约化子式均生成单位理想, 由定理 4.1 可知 F 与其 Smith 标准形等价.

构造如下同构映射:

$$\begin{aligned}&\phi_f:\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]^{2\times 2}\to\mathbb{Q}[z,x_2,x_3]^{2\times 2},\\&\quad F=(f_{ij}(x_1,x_2,x_3))_{2\times 2}\mapsto\phi_f(F)=(f_{ij}(z+f,x_2,x_3))_{2\times 2},\end{aligned}$$

其中 z 是不同于 x_1,x_2 和 x_3 的新变元. 于是,

$$\phi_f(F)=\begin{pmatrix}1-zx_2 & (-z+2)x_2\\ z(z+1)^2 & (z+1)^2(z-2)\end{pmatrix},$$

且

$$\det(\phi_f(F))=(z+1)^2(z-2)\in\mathbb{Q}[z].$$

此外, 由引理 4.3 可得

$$J_i(\phi_f(F))=\mathbb{Q}[z,x_2,x_3]\quad\text{且}\quad d_i(\phi_f(F))=\phi_f(d_i(F)),\quad i=1,2.$$

根据引理 2.3 计算可得如下两个幺模矩阵:

$$U'=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{9}x_2\\ -z(z+1)^2 & 1-\frac{1}{9}z(z+1)^2x_2\end{pmatrix}$$

和

$$V'=\begin{pmatrix}1-\frac{1}{9}z(z-2)(z+4)x_2 & -\frac{1}{9}(z-2)^2(z+4)x_2\\ \frac{1}{9}z^2(z+4)x_2 & 1+\frac{1}{9}z(z-2)(z+4)x_2\end{pmatrix}$$

使得

$$U'\cdot\phi_f(F)\cdot V'=\begin{pmatrix}1 & \\ & (z+1)^2(z-2)\end{pmatrix}.$$

令

$$U = \phi_f^{-1}(U')$$

且

$$V = \phi_f^{-1}(V'),$$

即将 U' 和 V' 中的变元 z 用

$$x_1 - f(x_2, x_3)$$

代替. 于是 $U, V \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]^{2\times 2}$ 为幺模矩阵, 且使得

$$U \cdot F \cdot V = \begin{pmatrix} 1 & \\ & (x_1 - x_2^2 + x_3 + 1)^2(x_1 - x_2^2 + x_3 - 2) \end{pmatrix}.$$

注 4.1 在例 4.1 中, U' 和 V' 的计算主要依赖于引理 2.3 的构造性证明过程. 由于需要引入局部化的概念, 因此具体计算过程在此省略, 感兴趣的读者可参见文献 [26].

5 结论

目前, 多元多项式矩阵的等价问题仍是开放性难题. 因此, 本文聚焦于某一类型的多元多项式方阵, 研究其与 Smith 标准形的等价关系. 通过建立两个多项式环之间的同构映射, 将原方阵转化为行列式为单变元多项式的方阵, 进而借助已有结果将其约化成 Smith 标准形. 随后, 运用 Quillen-Suslin 定理和多项式矩阵零素分解理论将该类型方阵推广至秩亏且非方阵情形. 由此, 证明 Frost 和 Storey 的断言在此情形下成立.

基于本文提出的两个问题与解决方案, 考虑如下问题. 已知 $F \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{l\times l}$ 满足

$$\det(F) = g(x_j) \cdot \prod_{i=1}^{t} [x_1 - f(x_2, \ldots, x_n) - c_i]^{s_i}, \tag{5.1}$$

其中

$$g \in K[x_j] \setminus K \quad \text{且} \quad j \in \{2, 3, \ldots, n\}.$$

问: 在此情形下, Frost 和 Storey 的断言是否成立? 若 F 秩亏且非方阵, 断言是否仍然正确? 与问题 3.1 相比, (5.1) 仅多了一个单变元多项式 $g(x_j)$. 但在本文构造的同构映射 ϕ_f 下, $\det(\phi_f(F)) \in K[z, x_j]$ 是一个非平凡的二元多项式, 导致引理 2.3 不再适用, 这为研究 F 与其 Smith 标准形等价带来了困难. 上述问题有待进一步的研究, 我们期望本文提出的方法能够激发新的研究思路, 使得多元多项式矩阵等价这一研究领域取得更大的进展.

致谢 感谢评审专家们对本文提出的宝贵修改意见和建议.

参考文献

1 Antoniou E, Vologiannidis S. On the reduction of 2-D polynomial systems into first order equivalent models. Multidimens Syst Signal Process, 2020, 31: 249–268

2 Bose N K. Multidimensional Systems Theory and Applications. Dordrecht: Springer, 1995

3 Boudellioua M S. Computation of the Smith form for multivariate polynomial matrices using Maple. Amer J Comput Math, 2012, 2: 21–26

4 Boudellioua M S, Quadrat A. Serre's reduction of linear functional systems. Math Comput Sci, 2010, 4: 289–312
5 Brown W C. Matrices over Commutative Rings. New York: Marcel Dekker, 1993
6 Buchberger B. Gröbner bases: An algorithmic method in polynomial ideal theory. In: Multidimensional Systems Theory and Applications. Dordrecht: Springer, 1995, 89–127
7 Cluzeau T, Quadrat A. Factoring and decomposing a class of linear functional systems. Linear Algebra Appl, 2008, 428: 324–381
8 Cortadellas T, D'Andrea C, Montoro M. Bounds for degrees of minimal μ-bases of parametric surfaces. In: Proceedings of the 45th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. New York: ACM, 2020, 107–113
9 Cox D, Little J, O'Shea D. Using Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics, 2nd ed. Heidelberg: Springer-Verlag, 2005
10 Eder C, Faugère J C. A survey on signature-based algorithms for computing Gröbner bases. J Symbolic Comput, 2017, 80: 719–784
11 Frost M G, Storey C. Equivalence of a matrix over $R[s, z]$ with its Smith form. Internat J Control, 1978, 28: 665–671
12 Frost M G, Storey C. Equivalence of matrices over $R[s, z]$: A counter-example. Internat J Control, 1981, 34: 1225–1226
13 Guan J, Liu J, Zheng L, et al. New results on equivalence of multivariate polynomial matrices. J Syst Sci Complex, 2025, 38: 1823–1832
14 Huang B, Chen F. Computing μ-bases of univariate polynomial matrices using polynomial matrix factorization. J Syst Sci Complex, 2021, 34: 1189–1206
15 Kailath T. Linear Systems. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1980
16 Li D M, Chen Z, Liu J W. Smith form of the matrix over the unique factorization domain (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 919–926 [李冬梅, 陈作, 刘金旺. 唯一分解整环上矩阵的 Smith 型. 中国科学: 数学, 2025, 55: 919–926]
17 Li D M, Liang R, Liu J W. Some further results on the Smith form of bivariate polynomial matrices (in Chinese). J Syst Sci Math Sci, 2019, 39: 1983–1997 [李冬梅, 梁芮, 刘金旺. 二元多项式矩阵 Smith 型的进一步结果. 系统科学与数学, 2019, 39: 1983–1997]
18 Li D M, Liu J W, Chu D. The Smith form of a multivariate polynomial matrix over an arbitrary coefficient field. Linear Multilinear Algebra, 2022, 70: 366–379
19 Li D M, Liu J W, Zheng L. On the equivalence of multivariate polynomial matrices. Multidimens Syst Signal Process, 2017, 28: 225–235
20 Lin Z. On matrix fraction descriptions of multivariable linear n-D systems. IEEE Trans Circuits Syst I Regul Pap, 1988, 35: 1317–1322
21 Lin Z, Bose N K. A generalization of Serre's conjecture and some related issues. Linear Algebra Appl, 2001, 338: 125–138
22 Lin Z, Boudellioua M S, Xu L. On the equivalence and factorization of multivariate polynomial matrices. In: Proceedings of the 2006 IEEE International Symposium on Circuits and Systems. New York: IEEE, 2006, 4911–4914
23 Liu J, Li D, Wu T. The Smith normal form and reduction of weakly linear matrices. J Symbolic Comput, 2024, 120: 102232
24 Liu J, Li D, Zheng L. The Lin-Bose problem. IEEE Trans Circuits Systems II: Express Briefs, 2014, 61: 41–43
25 Liu J, Wu T, Li D. Smith form of triangular multivariate polynomial matrix. J Syst Sci Complex, 2023, 36: 151–164
26 Lu D, Wang D, Xiao F, et al. On the equivalence problem of Smith forms for multivariate polynomial matrices. arXiv:2407.06649, 2024
27 Lu D, Wang D, Xiao F, et al. Signature-based standard basis algorithm under the framework of GVW algorithm. J Symbolic Comput, 2025, 127: 102370
28 Park H J, Woodburn C. An algorithmic proof of Suslin's stability theorem for polynomial rings. J Algebra, 1995, 178: 277–298
29 Pommaret J. Solving Bose conjecture on linear multidimensional systems. In: Proceedings of the 2001 European Control Conference. Porto: IEEE, 2001, 1653–1655
30 Quillen D. Projective modules over polynomial rings. Invent Math, 1976, 36: 167–171
31 Rosenbrock H H. State Space and Multivariable Theory. New York-London: Nelson-Wiley, 1970
32 Serre J P. Faisceaux algebriques coherents. Ann of Math (2), 1955, 61: 197–278
33 Srinivas V. A generalized Serre problem. J Algebra, 2004, 278: 621–627
34 Suslin A. Projective modules over polynomial rings are free. Soviet Math Dokl, 1976, 17: 1160–1165
35 Wang M, Feng D. On Lin-Bose problem. Linear Algebra Appl, 2004, 390: 279–285
36 Youla D, Gnavi G. Notes on n-dimensional system theory. IEEE Trans Circuits Syst I Regul Pap, 1979, 26: 105–111
37 Zheng L, Wu T, Liu J. Bivariate polynomial matrix and Smith form. Mathematics, 2024, 12: 815

38 Zheng X, Lu D, Wang D, et al. New results on the equivalence of bivariate polynomial matrices. J Syst Sci Complex, 2023, 36: 77–95

The equivalence theory of Smith normal forms for multivariate polynomial matrices

Dong Lu, Dingkang Wang, Fanghui Xiao & Xiaopeng Zheng

Abstract Multivariate polynomial matrices are fundamental objects of study in fields such as symbolic computation, commutative algebra, and multidimensional systems, and the associated equivalence theory concerning their Smith normal forms has broad applications. In this paper, we focus on a class of square multivariate polynomial matrices possessing specific determinant structures. By establishing an isomorphism, we transform such matrices into square matrices with univariate polynomial determinants. We then derive a necessary and sufficient condition for the equivalence of such a matrix to its Smith normal form: namely, that the reduced minors of each order generate the unit ideal. Furthermore, by utilizing the Quillen-Suslin theorem and the theory of zero prime factorization for polynomial matrices, we extend this framework to the rank-deficient and non-square cases. The equivalence of such a multivariate polynomial matrix to its Smith normal form can be determined using Gröbner basis algorithms. An example demonstrates the effectiveness of the proposed equivalence theory.

Keywords **multivariate polynomial matrix, Smith normal form, matrix equivalence, Gröbner basis**

MSC(2020) **68W30, 15A24, 13P10**

doi: 10.1360/SSM-2025-0178